د پوهنې وزارت

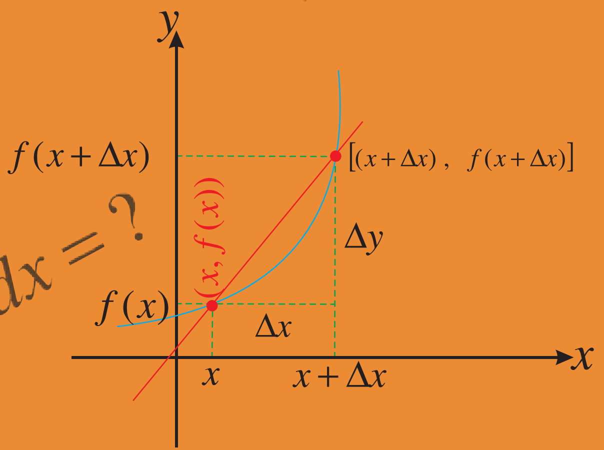
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

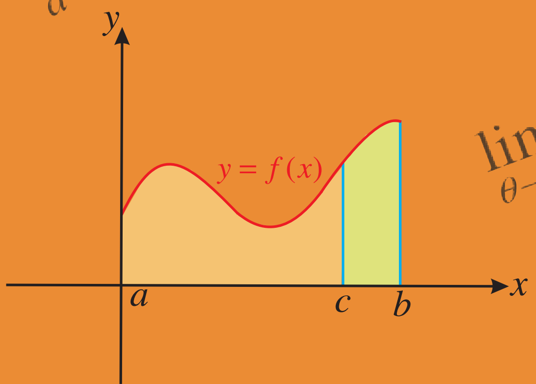
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$



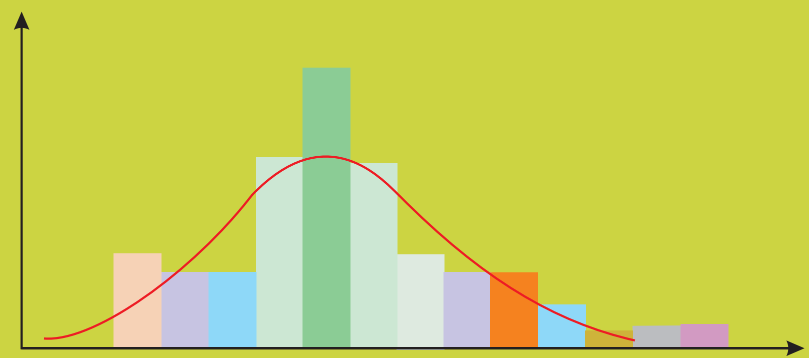
$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

د چاپ کال: ۱۳۹۰

ریاضي ۱۲ ټولګی



درسي کتابونه د پوهنې په وزارت پورې اړه لري. په بازار کې یې پېرودل او پلورل په کلکه منعه دي. له سرغړوونکو سره به یې قانوني چلند وشي.

د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت

د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضي ۱۲ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

ليکوالان:

- پوهيالی حمدالله شيرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- سرمؤلف ميرنقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

علمي او مسلکي ايډيټ:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.
- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- د مؤلف مرستيال رحيمه هدايت‌زی د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړې

د ژبې ايډيټ:

- محمدقدوس ذکوخيل د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

ديني، سياسي او کلتوري کميټه:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړی.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.

د څارنې کميټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شېر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئيس

طرح او ډيزاين:

وليد «نويد» نسيمي

بسم الله الرحمن الرحيم

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کیږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

سرلیک	مخونه
لومړی څپرکي لېمیټ	۱-۴۰

- د لېمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼې خوا لېمیټونه
- د لېمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابعګانو لېمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0 \cdot \infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعګانو لېمیټ
- د تابعګانو متمادیت
- د متمادي تابعګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات	۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعګانو مشتق
- د مثلثاتي تابعګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه	۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو د ګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافیک تابعګانو ګراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیټال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

سرليک | **مخونه**

څلورم څپرکی انتیګرال ۱۳۳-۱۷۲
- د ريمان مجموعه
- د انتيګرال مفهوم
- د غيرمعين انتيګرال خواص
- معين انتيګرال
- د معين انتيګرال خواص
- د مشتق او انتيګرال اساسي قضيې
- په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيونه
- قسمي انتيګرالونه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

پنځم څپرکی د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابعګانو مشتق او انتيګرال ۱۷۳-۱۹۸
- د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابعګانو مشتق
- د معکوسو تابعګانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشيل تابعګانو انتيګرالونه
- د لوګاريتمي تابعګانو انتيګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

شپږم څپرکی د انتيګرال تطبيقات ۱۹۹-۲۲۲
- د يوې منحني د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شويو منحنيګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالي محاسبه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

اووم څپرکی احصائيه ۲۲۳-۲۶۰
- د احتمال د تابع توزيع
- د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي آزمايښت
- د پواسن د احتمال توزيع
- د نورمال توزيع
- د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت او د هغې ستنډرډ کول
- نمونه اخيستل
- د نمونې د اوسط توزيع
- د مرکزي لېميټ قضيه
- د نمونه‌يي توزيع نسبت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

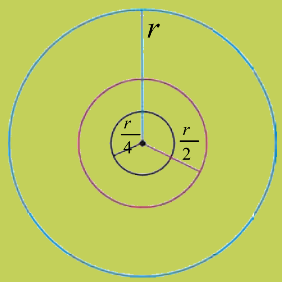
اتم څپرکی احتمالات ۲۶۱-۲۸۲
- پرېکړې او نښتې فضاګانې
- هم چانسه پېښې
- د نښتو يا پيوسته فضاګانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخاپه پېښو استقلاليت
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

لومړی څپرکی

لیمیټ

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې تـه نـور څـو ځلـې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

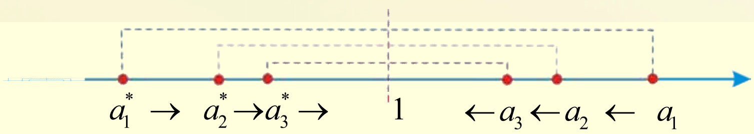
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منحنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګـراف پـه پـام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

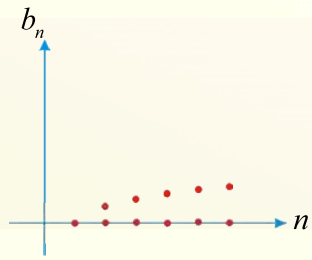
مثال: لاندي ورکړل شوي رديفونه د n د تر ټولو لويو قيمتونو لپاره کوم قيمت ته تقرب کوي يا نږدی کېږي، موضوع په ګرافيکي ډول تشريح کړئ، په داسې حال کې چې:

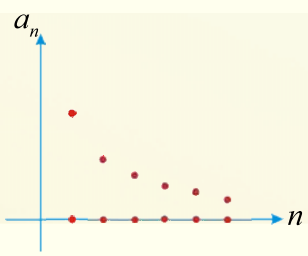
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ \dots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ \dots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \dots (iii)$$

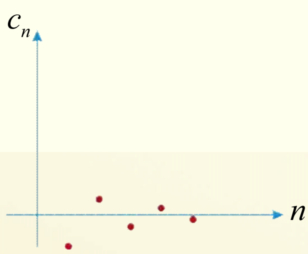
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قيمتونو لپاره ګرافيکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	→ ∞
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	→ 1

n	1	2	3	4	5	6	7	→ ∞
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	→ 2







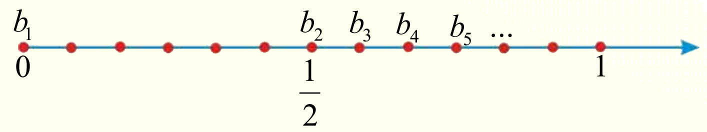
n	1	2	3	4	5	→ ∞
c_n	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	→ 0

له پورتينو ګرافونو څخه ليدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قيمتونو په زياتېدو سره د ترادفونو قيمت يوه ټاکلي عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لويو قيمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قيمتونو له جدول څخه د لېميټ قيمت څرګندېږي، د لېميټ په شته والی کې رديف يوه ټاکلي عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېميټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددي لپاره د $b_n=\frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نيسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او يـــــا کـــــه چيـــــري $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{n}$ .... I ، $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ \dots,\ \frac{n+1}{n}$ .... II او $2,4,6,\ \dots,\ 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونيسو، ليدل کېږي چې که n د بې نهايت لورې ته نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف د بې‌نهايت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعني د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta>0$) څخه کوچنی دی يا په لاندې ډول:

$\forall\delta>0:|x-a|<\delta$ يا $\lim\limits_{x\to a}x=a$ يا $x\to a$ يا $|x-a|\to 0$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x\to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots\to a^+$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x\to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots\to a^-$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

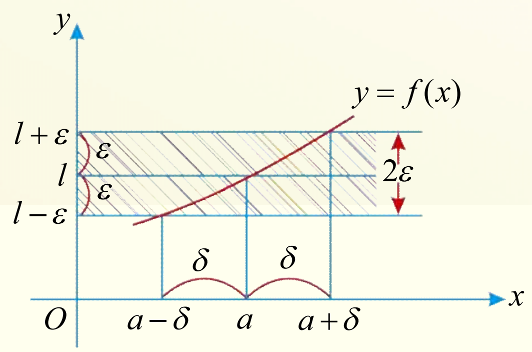
$x\to a\ \Leftrightarrow\ (x\to a^+\ ,\ x\to a^-)$

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \ldots \to 9^+$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \ldots \to 9^-$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; (|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

د ښي او کيڼ خوا لېميټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ وواياست چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېمټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېميټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېميټ لري که چيرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لېميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

دویمه بېلګه: و ښیئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کیڼي خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $6=\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}$ دي.

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ :\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېمیټ نه لري.

د لېمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلېمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لېمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لېمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K\lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې نهایت کوچنې تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنې تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنې تابعګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنې تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لیمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنې تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنې تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنې تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لیمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبووو:

1. د څو تابعګانو د مجموعې لیمیټ د نوموړو هرې تابع د لیمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ ، $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنې تابعګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

څرنگه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابعگانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومړو تابعگانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لیمیټ د هغو تابعگانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندي ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنۍ مثبت عددونه ($0<\varepsilon<1$) دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پايله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندوېچ قضيه: که چېرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x\neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a}h(x)=b=\lim_{x\to a}f(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصيت ($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ نو د ساندوېچ د قضيې په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1$$

قضيه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x)<g(x)$ نو د لميټ د شتون په صورت کې يې لميټ $\lim_{x\to a}g(x)\ge\lim_{x\to a}f(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابعګانې په پام کې نيسو په واضح ډول معلومېږي چې $f(x)<g(x)$ دی، د $x>1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتني

لاندې لېميټونه د امکان په صورت کې پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim_{x\to -1}x^7-2x-5$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

د نسبتي تابعګانو لېميټونه

آيا پوهيږئ چې مخامخ اړيکې په څه نامه ياديږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعاليت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېميټ هغه وخت پيداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېميټ هغه وخت پيداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېميټ هغه وخت پيداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

پايله

- د ځينو تابعګانو لېميټ مستقيماً د قيمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځينو تابعګانو لېميټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېميټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول يې تر څېړنې لاندې نيسو:

I- د $\frac{0}{0}$ **بڼه**:

فعاليت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قيمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېميټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آيا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره يو معين قيمت ولري؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

که چيرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبيثه فکتور) له منځه وړو او بيا يې د لېميټ قيمت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\ ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لیمیټ بنه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

ځرنګه چې پاسنې لیمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لیمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لیمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لیمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\quad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېږئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيداکړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

خرنگه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابعگانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېميټ په لاس راوړو:

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چیرې ($x\to\infty$) کړی وي؛ نو دلته درې

حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندي لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- خرنگه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- خرنگه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- خرنگه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي څوابونه په کورکې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونو پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ،کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعگانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنگه چې نومړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 2:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=(1-1)\left(\frac{1}{1^2+2-3}\right)=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

ليدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتني

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^\infty, \infty^0, 0^0$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- د $y = x^x$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې $1^\infty, \infty^0, 0^0$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعني:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چیرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاریږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

-II

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$　　2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$　　4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0$

$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$

$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u\to 0 \Rightarrow x\to\infty$

$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x\to 0 \Rightarrow u\to\infty$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$

4) $y = e^x - 1 \quad \Rightarrow e^x = 1 + y \quad \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \;,\; y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \;,\; y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

خرنګه چې $\alpha = u-1$ دی که چیرې $u \to 1$ **نو** $0 \to \alpha$ **ته نږدې کېږي په پایله کې:**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل: **لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

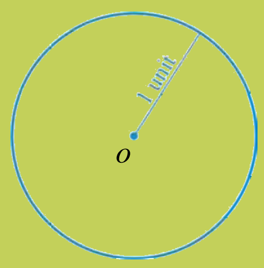
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits

که د يوې دايرې شعاع يو واحد (1unit) وي، نوموړې دايرې ته څه ډول دايره وايي.



فعالیت

- دوضعيه کمياتو په سيستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دايره کې د θ مرکزي زاويه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دايره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دايرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاويې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعاليت څخه قضيه داسې بيان او ثبوتوو:

قضيه: د يوې زاويې د ساين او د هغې زاويې د نسبت لیمټ مساوي په (1) دي، کله چې زاويه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

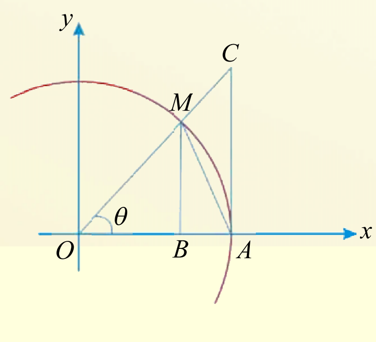
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت } MOA \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\overset{\frown}{A}M \text{ د} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاويې پراخوالی بايد په راديان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } C\overset{\Delta}{O}A \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د سانډويچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاويې ساين د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د سانډويچ د قضيې پر اساس ليکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پايله کې ويلای شو چې د يوې زاويې ساين او د هغې زاويې د نسبت لېميټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاويه بې‌نهايت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پيدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو ليکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتني

لاندي لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$

8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابعګانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړي او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلي یا متمادي تابعګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابعګانې په نوموړې ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابعګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x)=x^2+4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x=1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x=1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

لومړی مثال: وښیئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل:ځرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2\in Dom\ f(x)=IR \\ 2)\ \lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

ځرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

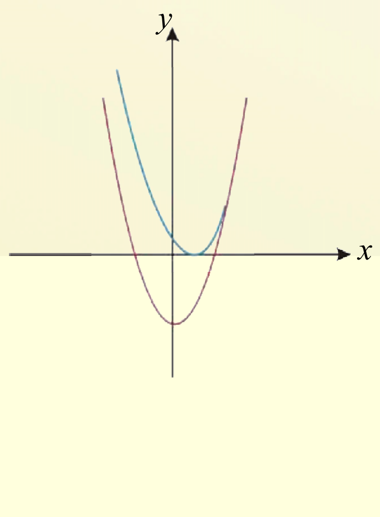
ځرنګه چې لیدل کیږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1\ ;\ x<2 \\ x^2-3\ \ \ \ \ \ \ \ ;\ x\geq 2\end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لیمتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کیږي.



څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 \ ; \ x\geq 1\\ 1-x \ ; \ x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې دریو شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متماديت وڅېړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابعگانو خاصيتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فعاليت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعگانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه يې هره يوه په $x = c$ يا يوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعگانو جمع $\quad f(x) + g(x)$

2- د تابعگانو تفريق $\quad f(x) - g(x)$

3- د تابعگانو ضرب $\quad f(x) \cdot g(x)$

4- د تابعگانو تقسيم $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلگه: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim_{x\to1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim_{x\to1}[(f+g)(x)]=\lim_{x\to1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim_{x\to1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وخېږئ، چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$	1) $Dg(x)=IR$
2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$	2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$
3) $f(2)=x+1=3$	3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$	$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابعګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشريح کړئ، چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غيرمتمادي ده.

د خپرکي لنډيز

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعني د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x: a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کيدای شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوی. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ويل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېميټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لېميټ ځانګړتياوې: که f او g دوې تابعګانې وي، C,L او M حقيقي عددونه وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې ليکلای شو:

1) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt{L}$

بې نهايت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندویچ قضیه: که چیرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x)=b=\lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x)=b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیداکولو لپاره چې $x\to\infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$
- د هغو تابعګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابعګانې چې د 1^∞ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$, $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ یې د لېمیټ د پیداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. a د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېمیټ ولري.
  3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښه کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیڅ یو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لیمیټونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x})$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a\,x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

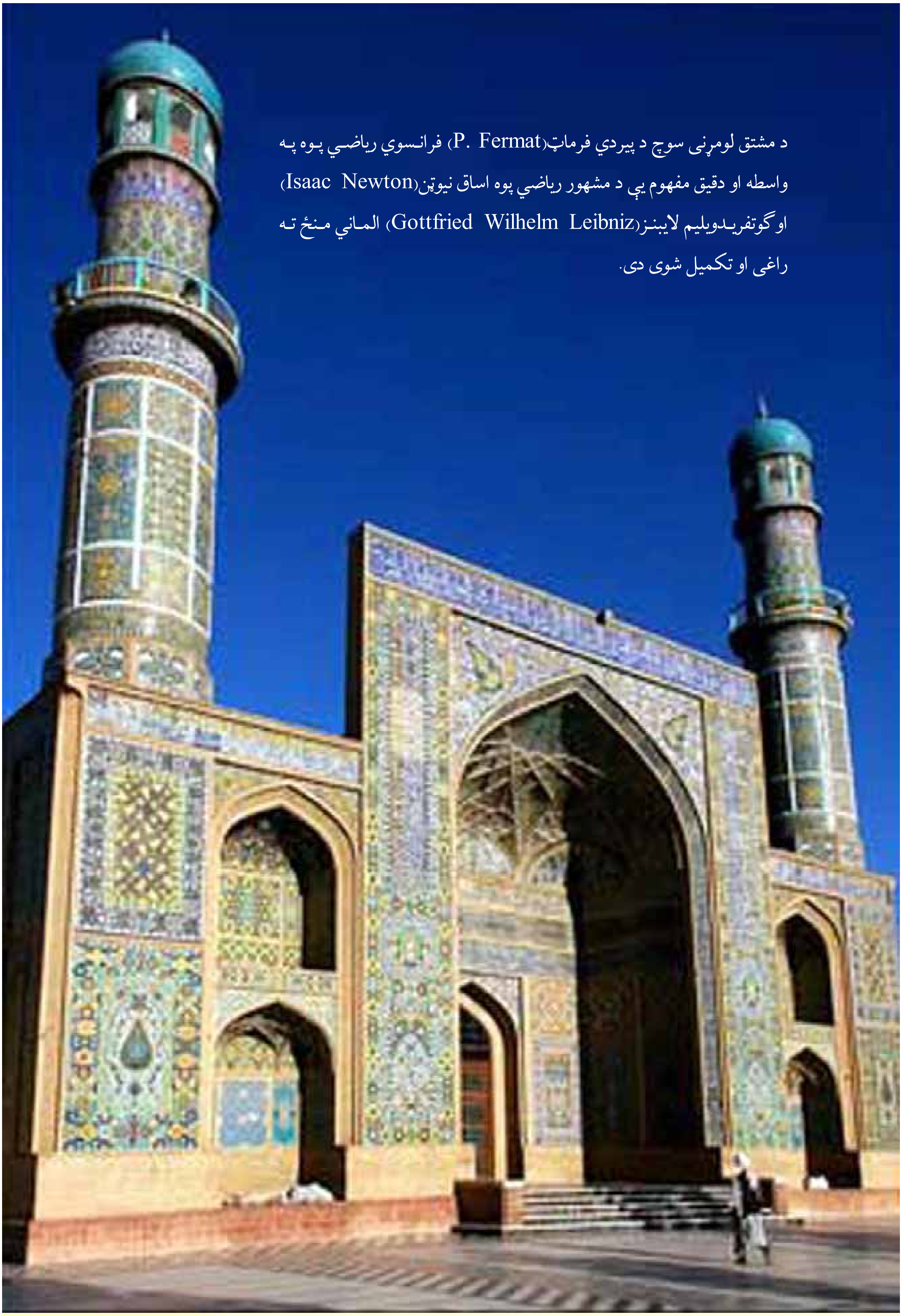
25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

دویم څپرکی

مشتق

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضـي پـوه پـه واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) اوګوتفریـدویلیم لایبنـز(Gottfried Wilhelm Leibniz) المـاني مـنځ تـه راغلی او تکمیل شوی دی.



مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونيسئ د مخامخ کسر ليميټ پيدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د يوه منحني ميل

- که د يوه مستقيم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقيم خط ميل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آيا د يوه مستقيم خط ميل ثابت او مساوي دي؟ که په يوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آيا د مستقيم خط ميل د هغې زاويې سره اړه لري، چې مستقيم خط يې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آيا د مستقيم خط او منحني ميلونه يو شان پيدا کيږي؟

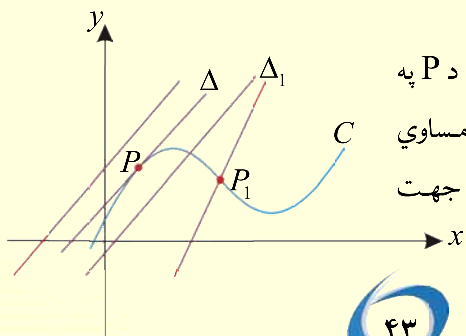
له پورتنيو پوښتنو څخه څرګنديږي چې د منحني ميل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسير ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل ميلونه لري، نو له دې کبله لومړی د يوه منحني خط ميل د هغه په يوه ټکي کې تعريفوو او بيا يې د محاسبې لپاره يو فورمول په لاس راوړو.

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکی ته نږدې شي، په پايله کې د Δ_1 مستقيم خط له Δ مستقيم خط سره څه اړيکه پيدا کوي؟

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

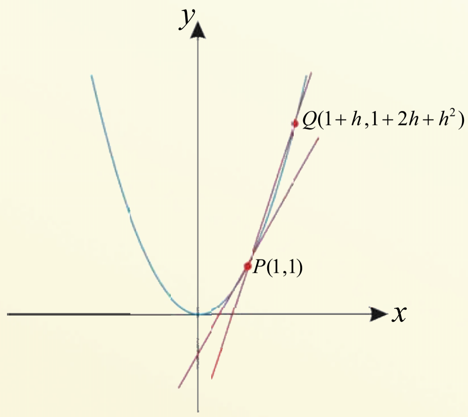
د Δ د مستقيم خط ميل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاويې له (tan) سره مساوي دی چې مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیداکولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیداکړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

د لیمیټ دا عملیه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني میل په یوه اختیاري ټکي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختیاري مختصات $[x+h, (x+h)^2]$ وي که د PQ میل ته m او د P په ټکي کې د مماس میل په m_T سره وښیو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دویم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(2,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکیل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني میل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنی یا وسطي تعبیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه یادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد یا لیمیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کیږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

د پورتنی رابطې لیمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالی خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د یو Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

د يوې تابع مشتق

مخامخ لېميټ څه را ښيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

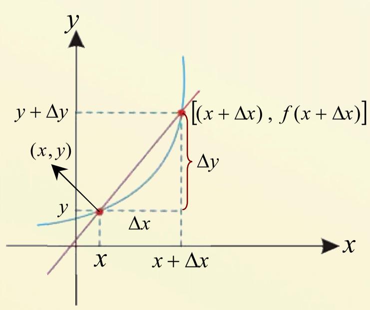
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعاليت

- که چيرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زياتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېميټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يا ليميټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعريف: د تابع او د متحول د بدلون د لېميټ نسبت ته کله چې د متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\ge 0$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\ge 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

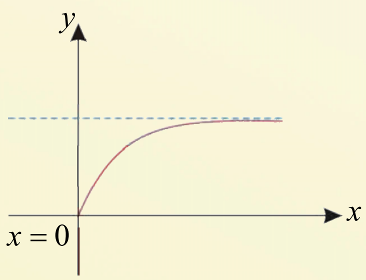
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کیږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کیږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي، $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ چې مماس په یوه عمود خط بدلیږي.



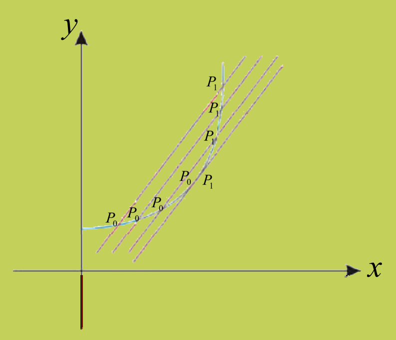
پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.

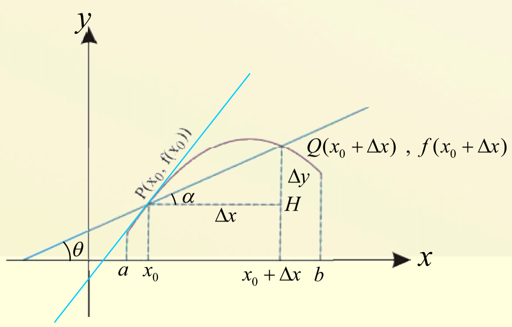


- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي ګراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- لېميټ د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعنې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$



تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\ \Rightarrow\ y=6x-5$$

دویم مثال: د $y=x^2+1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0=2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

دریم مثال: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2. **په ورکړل شویو ټکوکې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

د مشتق قوانين

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

فعالیت

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزاید) ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزاید) نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوتو له دواړو خواوو لېمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړيکه يې وليکئ؟
- د پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لیمټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + (x + \Delta x)^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ ځلې } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \;\Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \;\Rightarrow\; f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دي، نو: $\quad y' = u' + v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دي، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پیداکړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u \cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y=u \cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیداکړئ.**
- د Δy د تزاید له پیداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u \cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u \cdot v+u \cdot \Delta v+v \cdot \Delta u+\Delta u \cdot \Delta v-u \cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u \cdot \Delta v+v \cdot \Delta u+\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}=v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v \cdot u'+u \cdot v'+0 \cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{aligned} u = x^3 &\Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 &\Rightarrow v' = 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &y' = u'v + v'u \\ &y = x^3(x^2-3) \\ &y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ &y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{aligned}$$

دویم مثال: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{aligned} u = 5x-1 &\Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x-1 &\Rightarrow v' = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &y' = u'v + v'u \\ &y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ &y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{aligned}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

فعالیت

که د u او v تابعګانې مشتق منونکی وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړي او د y تابع تزاید پیداکړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

يادونه: که چيرې وغواړو چې د يوې تابع مشتق په يوه ټاکلي نقطه لکه په x_0 کې پيدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلی قيمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پيدا کړو، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم د مشتق څخه لرو:

$$u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \qquad v=1-3y \Rightarrow v'=-3$$

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0}$$

$$f(0)=-9$$

دریيم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

7- د يوې مربع جذري تابع مشتق:

فعالیت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېمېټ په هغه صورت کې ونيسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \quad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 + x \quad &\Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad &\Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt[3]{x}-1 &\Rightarrow u'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 &\Rightarrow v'=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)&=\frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{aligned}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

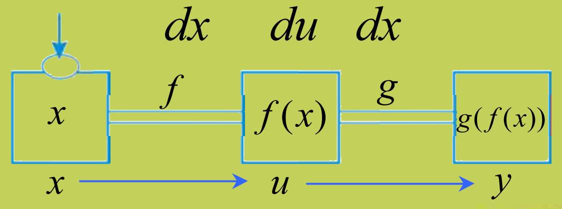
$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0]$

د مرکبو تابعګانو مشتق(زنځيري قاعده)Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيـان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعاليت

که چيرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آيا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کيږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad =(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad =12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} u=1-x^2\quad\Rightarrow u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو:

$$y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad =14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

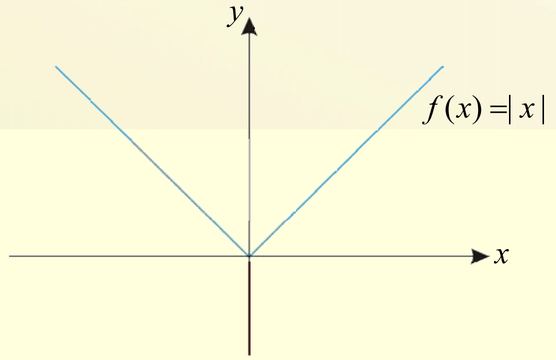
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده، خو برعکس یې ټیک نه ده، یعني کیدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي یا پیوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



ليدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

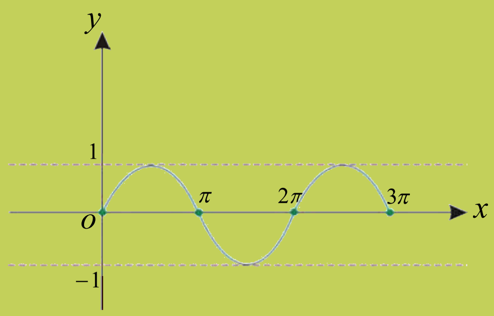
4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دایره او رادیان تعریف کړئ.
- آیا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړیکه حقیقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونیسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونیسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطې څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x = x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

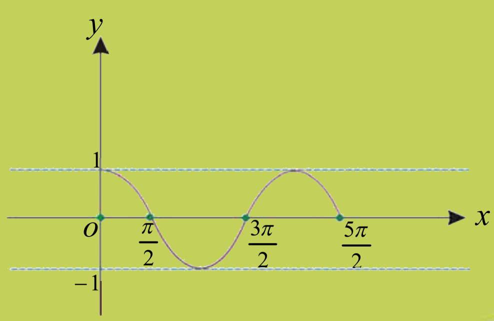
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزايد ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکيل او له اطرافو څخه لېميټ ونيسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$

$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x\quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دي، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که $y = \cos u$ چیرې وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u - \cdot \sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

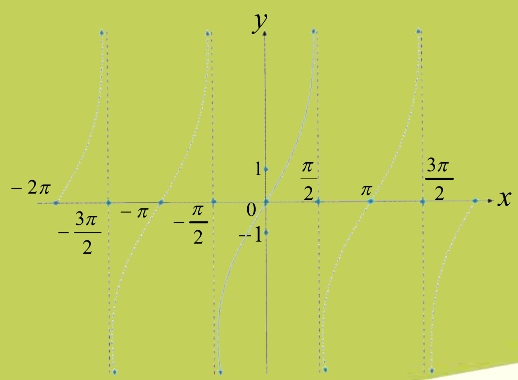
د لاندې تابعګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tan^3 x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3\tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$

دویم مثال: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع شکل د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$
$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$
$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د u, v, u' او v' قیمتونه د $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$
$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y = \tan x \cot x$

$b)\ y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)\ y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ y = \tan x \sec x - \cot x$

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پیداکړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیداکولای شئ.

د یوه منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x, y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x, y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x, y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x, y) = 0$ معادله کیدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیداکولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوی وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته} (y \text{ ثابت دی})}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته} (x \text{ ثابت دی})}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیداکوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\ &=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\ f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\ &=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5-1} = \frac{2x}{6y^5-1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5-1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x-0-0}{0-2y-0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نیسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پیدا او پر منحنی د مماس معادله یې ولیکئ.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پیداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \quad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ ضمني تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیداکړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیداکړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکې وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'_{(x)}$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''_{(x)}$ … په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

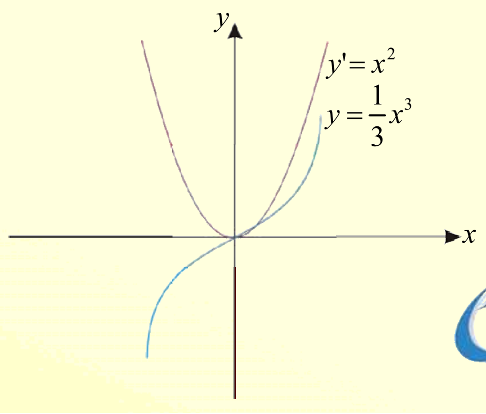
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ د تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راورو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړې شوې وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وي، نو: $f^k_{n(x)}=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

د څېرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحنی میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړئ، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحنی سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ یعنې کیدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحنی $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د یوه منحنی سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعریف شوی وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحنی د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

مشتق قوانین:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

1) $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \Rightarrow y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n - ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f_{(x)}^{(n)}$ دی.

د دویم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحنی میل د $P(3,0)$ په ټکی کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکی کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y=5x-5$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8- د $y=\sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پيدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پيدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پيدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

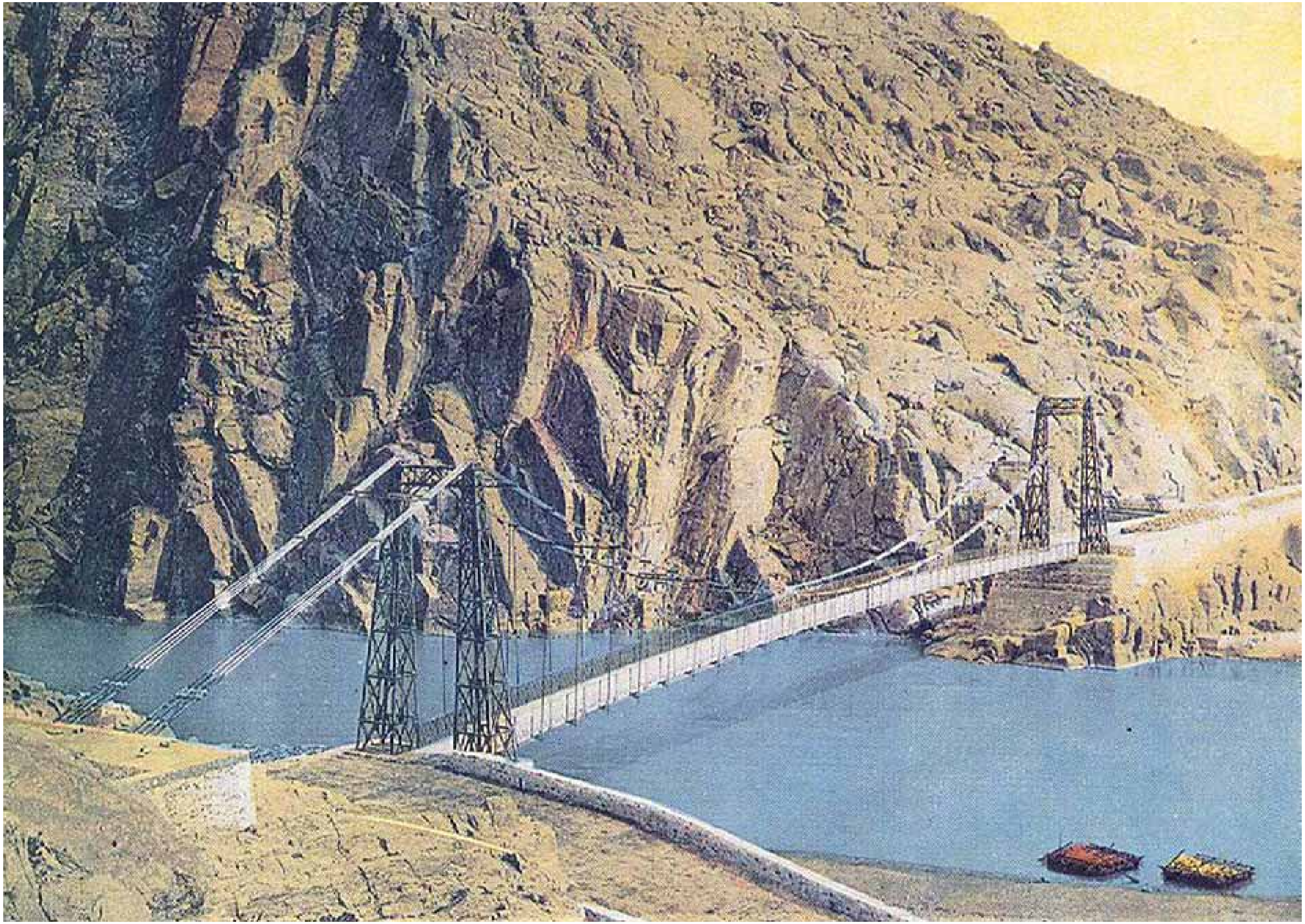
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پيدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پيدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

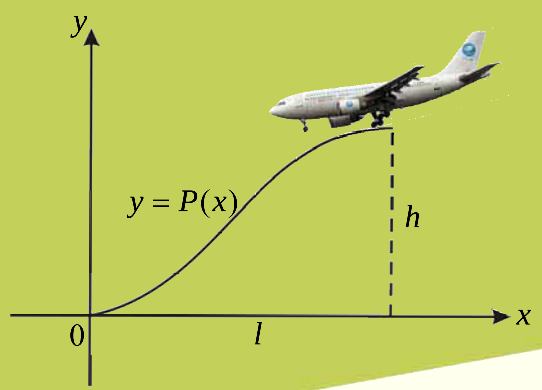
دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه



د مشتق د استعمال ځایونه

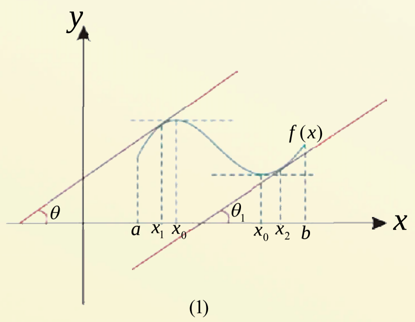
د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.



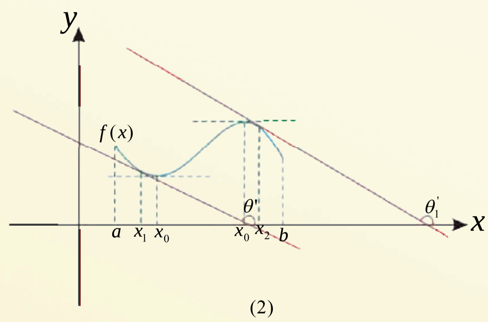
له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړونـد معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کیږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

I- د یوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a,b) په انټروال کې د x_0 ، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څيړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کيږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کيږي.

يادونه:د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل:څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کيدای شي او هم پوهيږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کيږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm1$$

ليدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته خیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوی تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

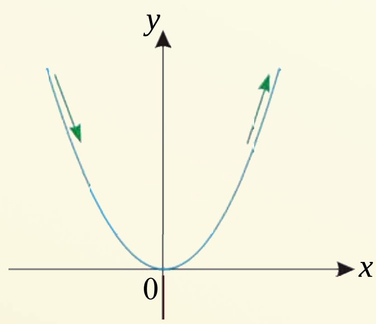
حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4	↗	$+\infty$



د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښئ؟

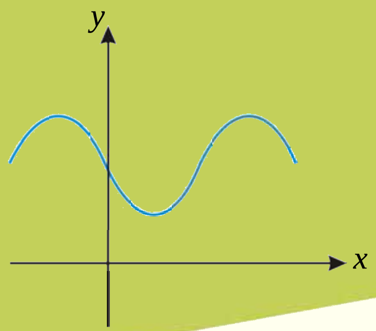
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزایده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزاید انټروال و ټاکئ؟

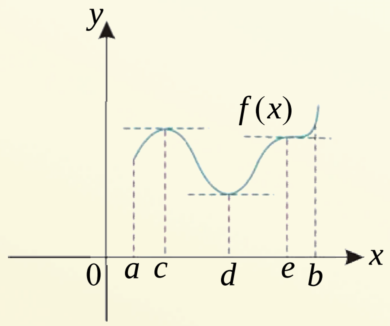
د يوې تابع بحراني (*Extreme*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



فعاليت

که په لانديني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوييږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

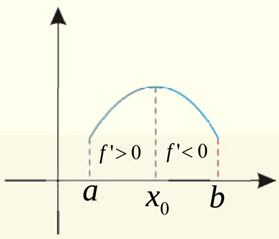
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(Extreme) نقطو په نامه يادېږي.

تعریف:

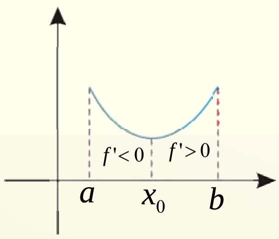
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$	↘	-2	↘	-2	↗	$+\infty$
			Max				Min		

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

دوېیم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړی.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow\ -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	-2	↘

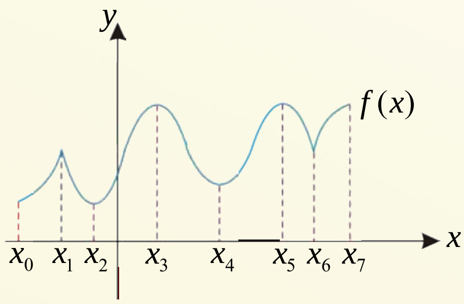
په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغير ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کيداى شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟

فعاليت

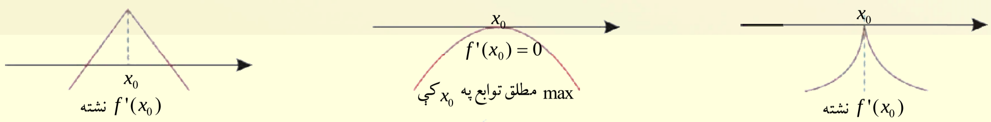
لاندينى شکل ته ځير شي:



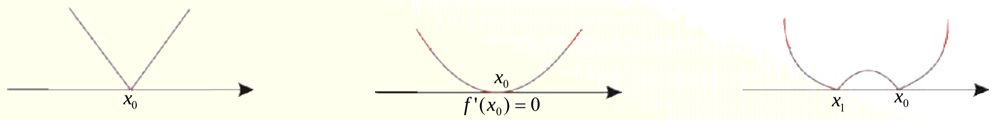
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کيږي، که چيرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.



مطلق اصغري *Minimum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کـې $f(x_0)$ تـه مطلقـه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپـاره تـابع يـا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلـي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.

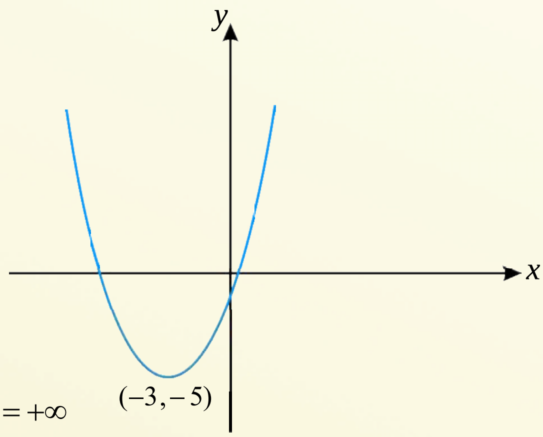


$f'(x_0)$ نشته　　　مطلق توابع په x_0 کې min　　　$f'(x_1)$ او $f'(x_0)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5 Min	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$

په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تـابع قيمـت (-5) دی او تـابع پـه $(-3,-5)$ ټکـي کې مطلق اصغري لري.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

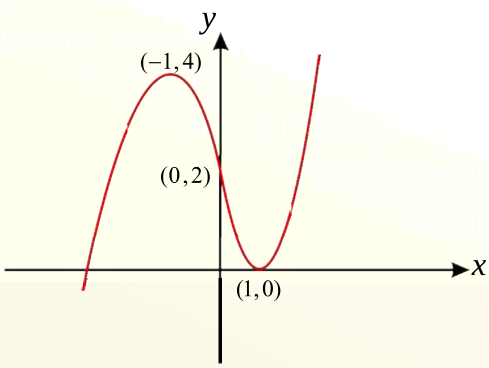
$f(1)=1^3-3\cdot 1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot 0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot 2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$

$Max\ f(2)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 −	−	0 +	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{5}{6}$ ↗	4 ↘ (Max)	2 ↘	0 ↗ (Min)	4 ↗	$+\infty$

له جدو څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محورونو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره دګراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دګراف د پرېکړې د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 ، \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دویم مشتق پـه $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} ، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

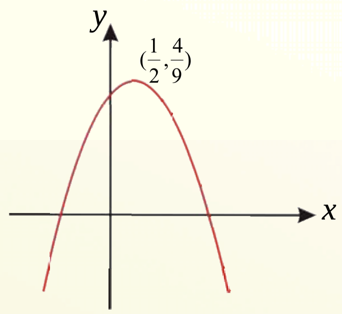
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او دتابع ټول بدلونو نه په هغوکې په ګوته کوو او وروسته نومړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



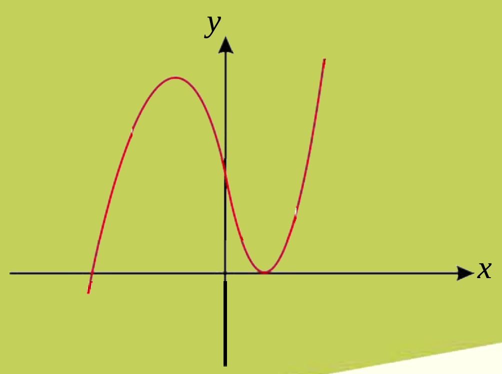
پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $b)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

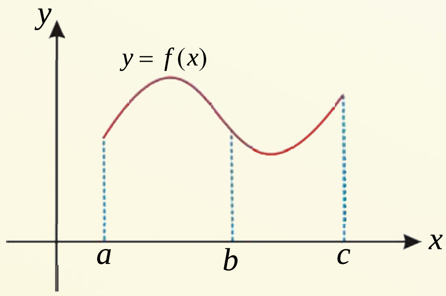
د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د يوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څرګند شئ؟

فعاليت

لاندينۍ شکل په پام کې ونيسئ.

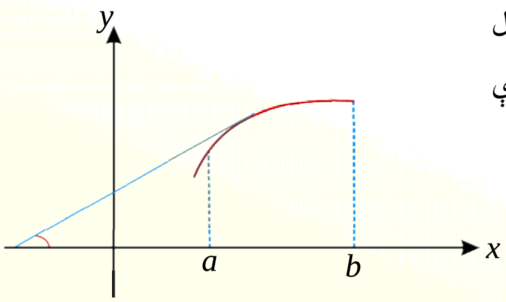


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

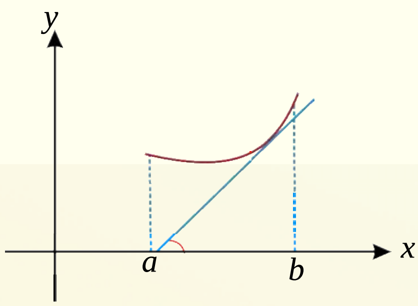
د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چيرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y''<0$ په لاس راځي.

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې یا شکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت وي $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کیږي.



تعریف: هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا دې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

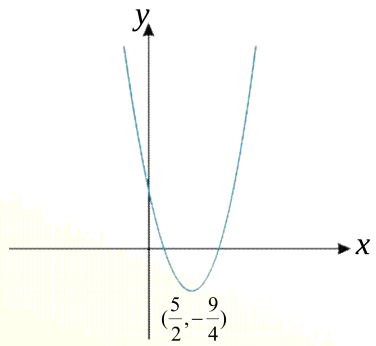
1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.



x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	4 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

د ګراف، مقعريت او محدبيت د څيړلو لپاره د تابع دويم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پايله کې ويلای شو چې منحني ننوتې يا مقعر دی.

دويم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب يا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$$
$$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$$
$$6x<-18 \Rightarrow x<-3$$
$$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$$
$$6x\geq -18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې ليدل کيږي د تابع دويم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دويم کې مقعر دی.

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کیږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$، $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

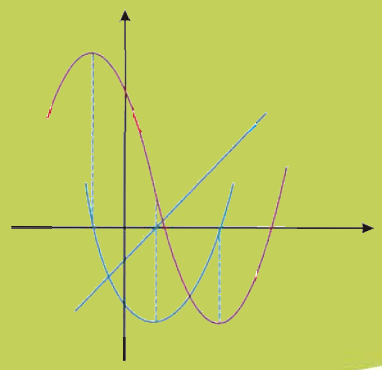
پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

د منحنيګانو رسمول

د دويمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کيږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره ټاکلې ده، يعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \;\Rightarrow\; a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \;\Rightarrow\; \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\,,\,\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

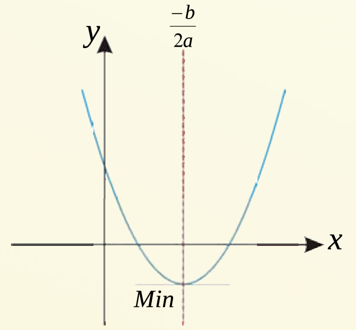
الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

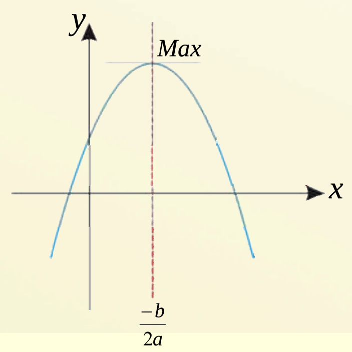
3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:



$a>0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$

خرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$

خرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1 \\ x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3 \end{array}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (0,3)$$

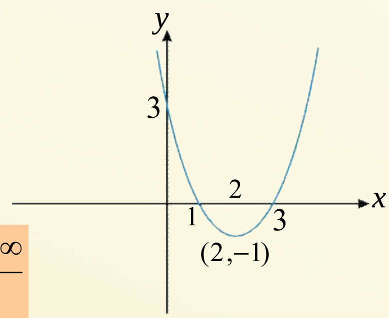
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولو لپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \;\Big\}\; \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1 (Min)	↗	0	↗	$+\infty$

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$f(x)=0$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$ — د تقاطع ټکی

$x_1=0 \qquad (0,0)$

$-x+2=0$

$x_2=2 \qquad (2,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

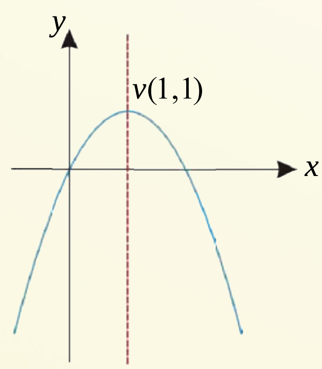
$x=0$

$f(x)=-x^2+2x$

$f(x)=0+2\cdot 0$

$f(x)=0 \qquad (0,0)$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:



$D_f \to (-\infty,+\infty)$

$f(x)=-x^2+2x$

$f'(x)=-2x+2=0$

$-2x+2=0$

$-2x=-2$

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		−		−
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	1 (Max)	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$

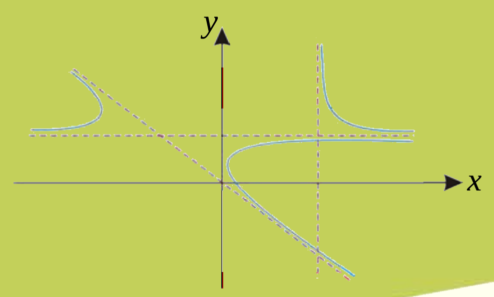
په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتني

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه يې واخلئ.

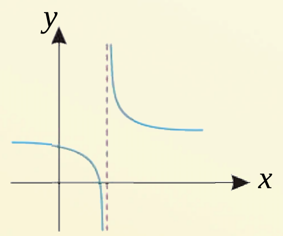


فعالیت

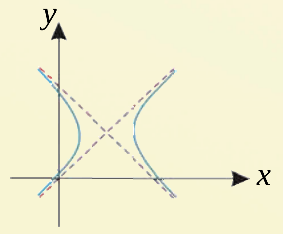
- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لاربود حیثیت لري او د منحني کرښه غوڅه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

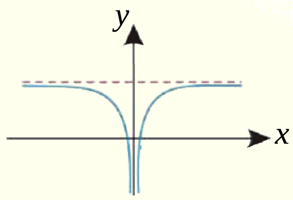


1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعني $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x \to \infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x \to \infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

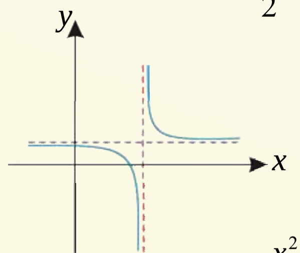
لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج ویشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \;\Rightarrow\; x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دریم مثال: د $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- خرنگه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پیدا نه شوه، نو تابع مایل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چیرې د $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چیرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چیرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

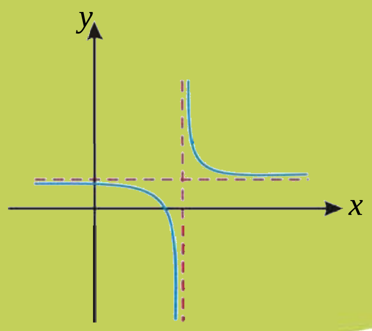
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



فعالیت

- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړې تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا يې رسم کړئ.
- د تابع دګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابعګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. خرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domin = IR \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

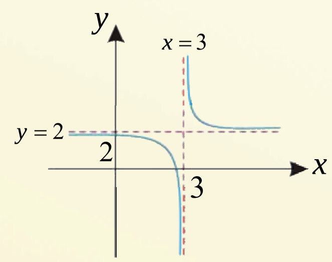
ب- عمودي مجانب: $x=3 \Leftarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘ $-\infty$	نه دی تعریف شوی	$+\infty$ ↘



دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعنې تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودی مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

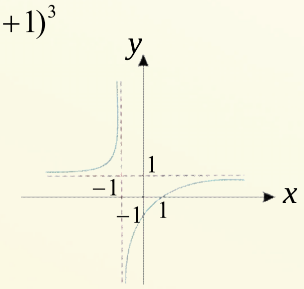
5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$ -1	
$f'(x)$	+	+
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	1 ↘ نه دی تعریف شوی	↗ 1



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورانو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنگه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

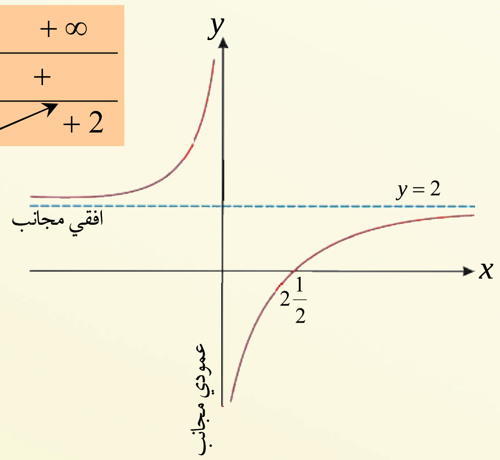
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنگه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

دگراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5	$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+
$f(x)$	2	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0	↗ $+2$

نه دی تعریف شوی



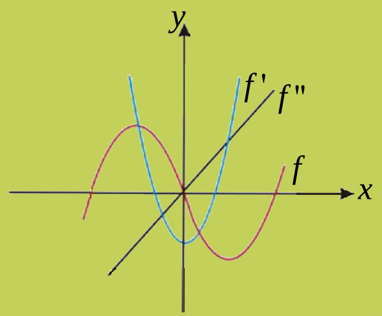
پوښتنې

1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعوګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع دګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



فعاليت

- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نوموړې تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

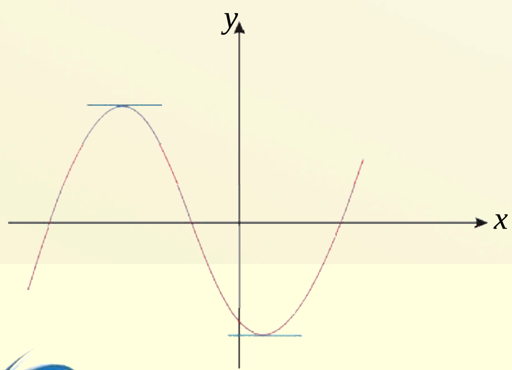
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو که چيرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چيرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چيرې $a > 0$ وي منحنی له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه(Maximum) او يوه نسبي اصغري(Minimum)لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

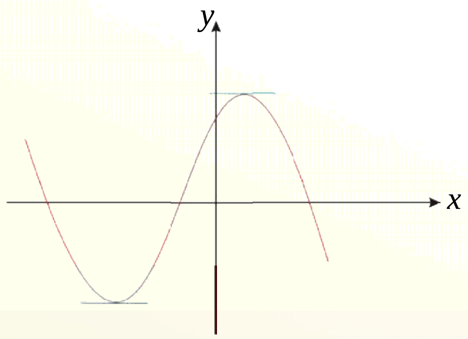
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چیرې $\Delta f'>0$ نو منحنی د کین لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری(Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

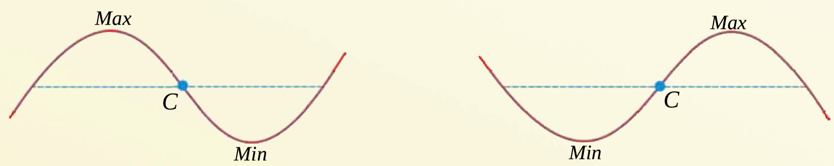
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↘		↗		↘ $+\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ډټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$

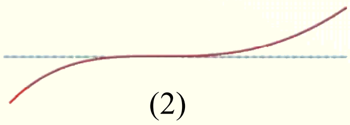


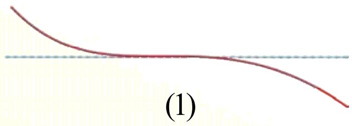
4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نومورې معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.


(2)


(1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

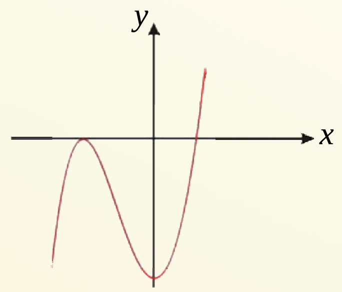
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+	
$f''(x)$	−	−	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘ (max)	-2 ↘	-4 ↗ (min)	$+\infty$



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وخیړئ اوگراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راورو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0 \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ ,\ -3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2) &= -2^3+3\cdot 2^2=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} & y=0 \\ & -x^3+3x^2=0 \\ & x^2(-x+3)=0 \\ & x_1=0\ ,\quad -x+3=0 \\ & \qquad\qquad x_2=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\quad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

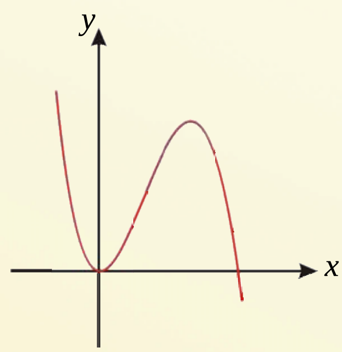
$$\left.\begin{aligned} & x=0 \\ & f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \ \Rightarrow\ I(1,2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	2	↗	4	↘ $-\infty$
		نسبي Min				نسبي Max	



دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

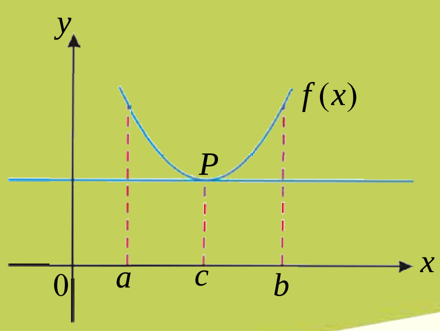
$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

د رول قضيه

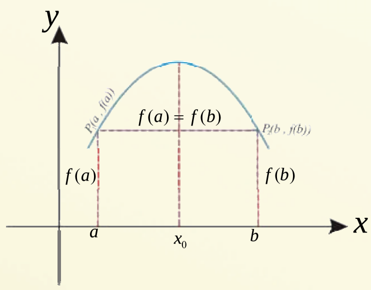
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقيم خط يو له بل سره څه اړيکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.



فعاليت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انتروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازی وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انتروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انتروال کې وخيرې.



د پورتني فعاليت څخه لاندې قضيه بيانولای شو:

قضيه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انتروال کې متمادي او د $a<x<b$ په انتروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 يو ټکی په $a<x<b$ انتروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکي لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ کې یو $x_0 \in [a,b]$ Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \ge f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi, 5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi, 5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ کې درې ځله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړي.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

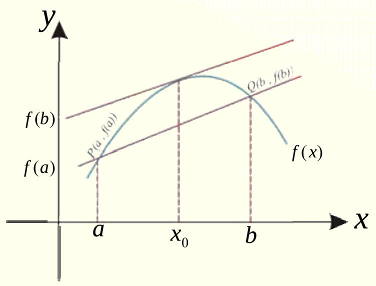
د $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه):

فعالیت

مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:



- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) د انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیداکړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعالیت

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او یا $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته ادامه ورکوو ... n تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیتونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

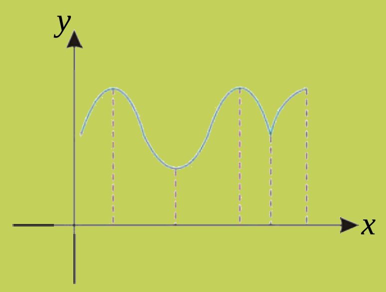
د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیتونه پیدا کړئ.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{3x^3}$

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منځنی نسبت پیداکړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیداکړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$\text{میحط} = 2x+2y = 200$

$\text{میحط} = x+y = 100 \quad \Rightarrow y = 100-x$

$\text{مساحت} = x \cdot y$

$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$

$x > 0 \quad , \quad y > 0 \ \Rightarrow 100 - x > 0 \ \Rightarrow x < 100$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیداکوو:

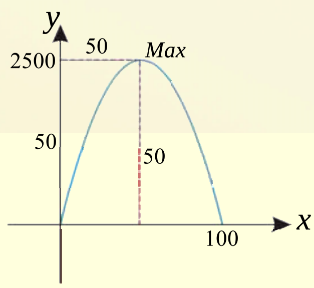
$S' = 100 - 2x$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$

$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$

x	0	50	100
S'	+	0	−
S	0 ↗	2500	↘ 0



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنۍ فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

8- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دی له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24-2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$V = 24x^2 - 2x^3$	$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$
$V'(x) = 48x - 6x^2$	$= 0 - 0 = 0$
$V'(x) = 0$	$V'(0) = 0$
$48x - 6x^2 = 0$	$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$
$x(48-6x) = 0$	$= 1536 - 1024 = 512$
$x_1 = 0$	$V(8) = 512$
$48 - 6x = 0$	$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$
$-6x = -48$	$V(12) = 0$
$x = 8$	

نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعې حاصل یې 20 او د ضرب حاصل یې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلعه یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کوچنې مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پیدا کړئ.

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وايي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چیرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چیرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابعګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دريم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

a) $f'(x)=0$ b) $f'(x)<0$ c) $f'(x)>0$ d) $f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته:

a) Minimum وايي b) Infliction وايي c) Maximum وايي d) هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي b) یو ټکی c) درې ټکي d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی b) دانعطاف ټکی دی c) اصغری ټکی دی d) هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

a) $(-\infty , +\infty)$ b) $(-\infty , 0)$ c) $(0,-\infty)$ d) هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=-1$ d) $x=-2$

7- د هوموګرافیک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a) $y=\dfrac{a}{c}$ b) $x=-\dfrac{d}{c}$ c) $y=\dfrac{c}{a}$ d) $y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

a) 4 b) 6 c) -6 d) -4

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f'(x)$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیڅ یو

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x) = x^2 - x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x) = -x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x$ 2) $f(x) = 3x^2 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$ 2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x) = 2x - 4x^2$ 2) $f(x) = 3x^3 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x) = 7x^2 - 3x$, $x_0 = -1$

2) $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$

7. د $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د $x^2y + 6y^3 = x - 3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 \sec x$ 2) $f(x) = \sin(3x - 1)$ 3) $f(x) = \cos^2 2x$

10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل يې تر ټولو کوچنی شي؟

11. د $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x) = \sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

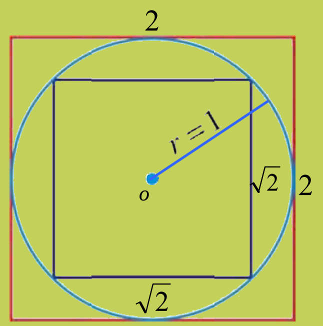
14. د $f(x) = \tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

څلورم څپرکی

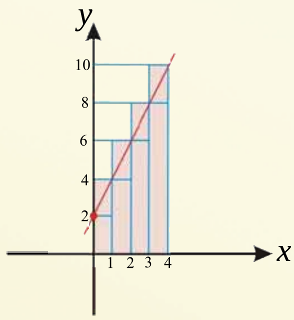
انتیګرال

د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دایرې شعاع یو واحد وي، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي گانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي گانو سره څه اړیکه لري؟



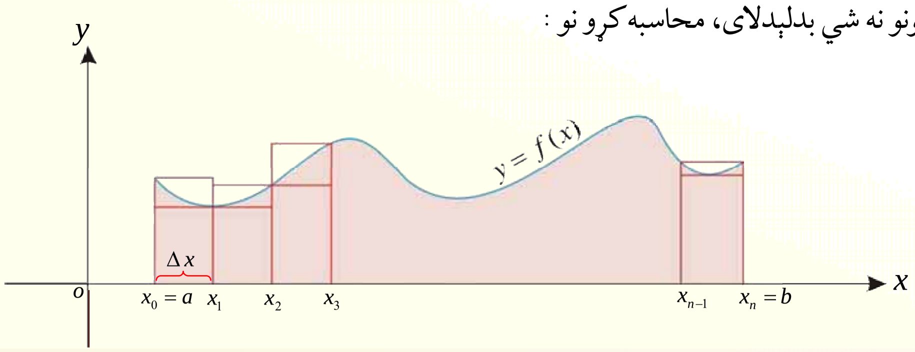
- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د گراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په گراف کې د څلورو لاندینیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي پیدا کړئ.
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د گراف د لاندینۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د گراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چیرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په گراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کېږي.

---

[1]- که چیرې د x په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چیرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د گراف لاندنۍ مساحت د قیق په لاس راځي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلې انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي که چيرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو :



د $[a,b]$ ترلې انټروال چې په n مستطيلو نو وېشو، خرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x ..., x_i = a + i\Delta x, \ ... \ , x_n = b$

$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ ... \ ,[x_{i-1}, x_i], \ ... \ ,[x_{n-1}, x_n]$

کـه پـه شـکل کـې د لانـدينيو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيـو مـستطيلونو مـساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ ... \ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ ... \ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چيرې محصور شوی مساحت په A وښيو نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چيرې د رابطې له اطراف څخه ليميټ ونيسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو؛ چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ريمان مجموع او ددې مجموعې لېميټ يعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ريمان د مجموعې لېميټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو وويشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني، او x محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چيرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وويشو؛ نو د مستطيلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \;,\; [x_1, x_2] \;,\; [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

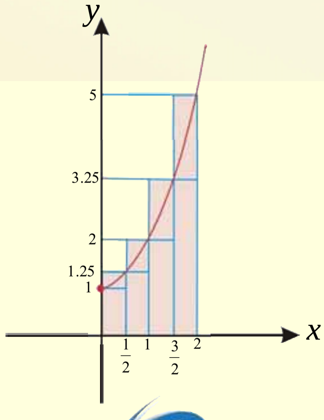
$$[0,\tfrac{1}{2}] \;,\; [\tfrac{1}{2},1] \;,\; [1,\tfrac{3}{2}] \;,\; [\tfrac{3}{2},2]$$

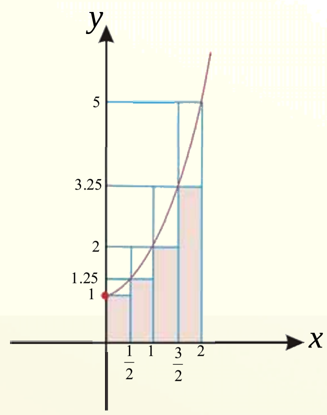
د تابع دګراف د رسمولو لپاره تابع ته قيمتونه ابږدو او د مستطيلونو طول لاس ته راځي:

$$f(x) = x^2 + 1 \,,\, f(0) = 1$$

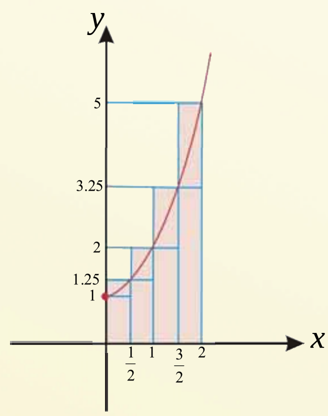
$$f(\tfrac{1}{2}) = 1.25 \,,\, f(1) = 2$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = 3.25 \,,\, f(2) = 5$$





د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2} + 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} = 3.75$



د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2} = 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1, 10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

حل:

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n}(a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(n + \frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

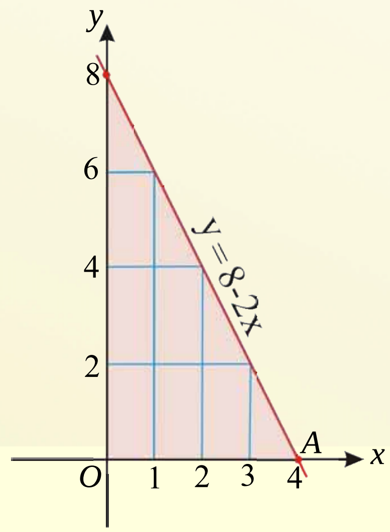
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیداکړئ.



د انتیګرال مفهوم

Concept of Integral

خرنګـه چـې پـوهېږئ د شـکلونو لانـدیني او پـورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لېمیټ تـه انتیګرال وایـي دا($\int$) د انتیګرال علامـه ده، د sum د کلیمـې یـا د ریمـان د مجمـوعې د S تـوري غزیـدلی حالـت دی، لکه: $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ چې دلته $f(x)$ تـابع او dx د $f(x)$ تـابع د انتیګـرال متحـول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیګرال Indefinite Integral

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې(-1) په نوموړې تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یـوه لـومړنی تـابع وي. د $F(x)+C$ تابعګانو سـټ پـه داسـی حـال کـې چـې C یـو ثابت عـدد وي د $f(x)$ تـابع غیـرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیداکړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیداکړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x\,dx$

د غیرمعین انتیګرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l} \int \quad dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , \ g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راورو:

څرنګه چې د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int \ dx = \ \int dx = \ x + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل : $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n \neq -1$ وي، نو : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیگرال** پیدا کړی.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چیرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال: **د** $\int 2x^2\, dx$ **انتیگرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- کـه چیـرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعگـانې وي پـه دې صـورت کـې د تابعگـانو د جمـع او تفریـق د حاصـل انتیگرال مساوی دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چیرې دتابعگانو ترادف تر انتیگرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیگرال مساوی دی په:0

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انتیګرال مساوی نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابعګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx$$

$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$

$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلې قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$

$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابعګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx$$

$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$

$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انتیگرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx = \int (x+1)\,dx \cdot \int (x-2)\,dx = \left(\int x\,dx + \int dx\right)\left(\int x\,dx - \int 2\,dx\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x+C\right) = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

په پایله کې ښکاره شوه چې مساوات حقیقت نه لري.

پوښتنې

د انتیگرال د خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx = ?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx = ?$

c) $\int 2x^4\,dx = ?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx = ?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)\,dx = ?$

f) $\int (2x+3)^6\,dx = ?$

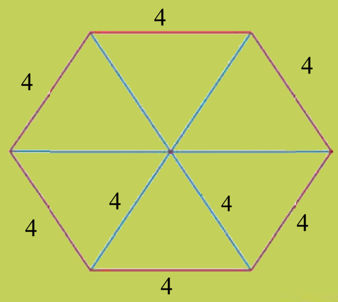
g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}\,dx = ?$

h) $\int (2+x)\,dx = ?$

معین انتیګرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



- **د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندینی مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د ګراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدې شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

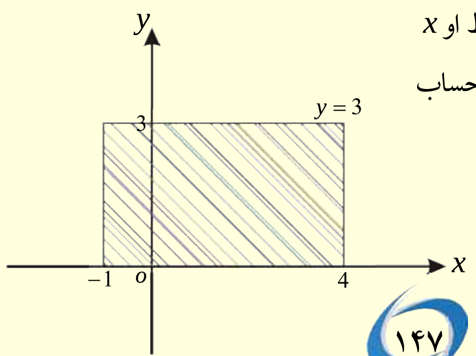
چې a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثـال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ معین انتیگرال د یوه مستطیل مساحت رابنیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

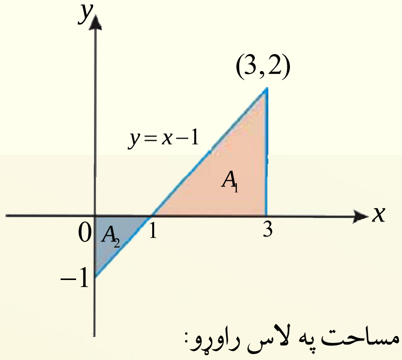
د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$

د انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\,dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

حل:



له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

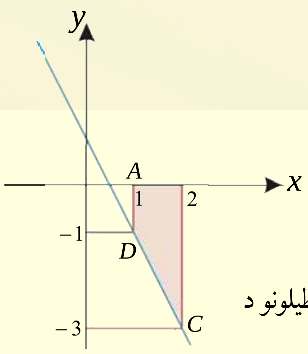
د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له: $\int_{0}^{3}(x-1)\,dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.



2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انتروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

- د $\sum_{=1}^{4} 3^{\ 2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلي انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

مثال: $\int_{3}^{4} dx$ ټاکلی انتيګرال حساب کړئ.

حل: $\int_{3}^{4} dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتيګرال منونکی وی او یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ثبوت: که چیرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i = 1,2,...,n$ په n مساوي برخو وویشو نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\, dx$ ټاکلي انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4 \cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{b}^{a} f(x)\, dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a))$$

$$= -(F(a) - F(b)) = -\int_{b}^{a} f(x)\, dx \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int_{b}^{a} f(x)\, dx$$

مثال: د $\int_{3}^{2} 2x\, dx = -\int_{2}^{3} 2x\, dx$ انتيګرال مساوات پیدا کړئ.

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

مثالونه:

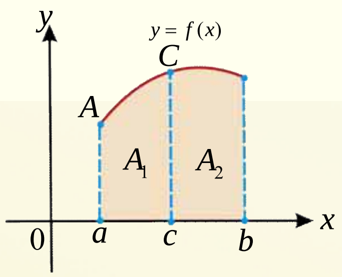
حل:

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه تړلې انټروال کې چې د a, b او c ټکي په کې شامل دي انټیګرال منونکې وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



ثبــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انټیګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

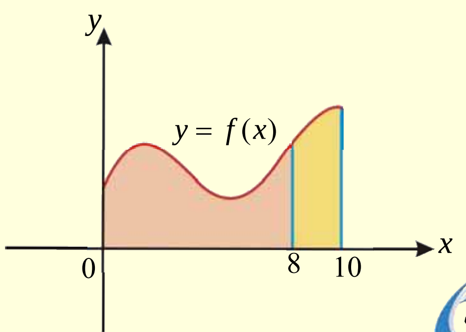
$$A_2 = \int_c^b f(x)\,dx \ ، \ A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې:

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_8^{10} f(x)\,dx$ انتيگرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چيرې د $f(x) \le g(x)$ تابعگانې په $[a,b]$ انټروال کې انتيگرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنگه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمېټ هم منفي نه دی يعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: که چيرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښاياست چې $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_a^b (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_a^b (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_a^b 1\,dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le +\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b^3-a^3)$$

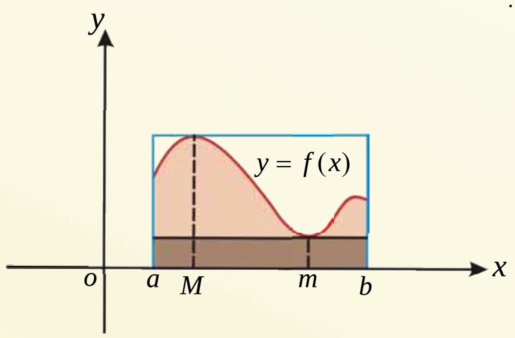
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

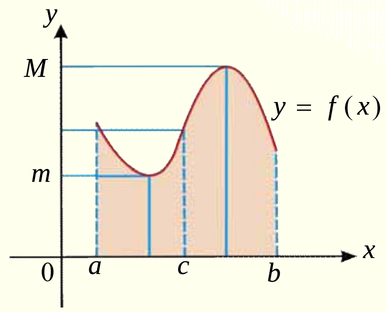
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \;\Rightarrow\; m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $\le M$ $m \le$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $f(c) =$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي خرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

حل: خرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په   او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې ځخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معین انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3 - \frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2 - \frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ، چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوې فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فعالیت

- د مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړۍ اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چيرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

ثبـــوت: د مخکينـــی قـــضيې څخـــه پـــوهېږو چـــې کـــه $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ دی لـــه دې ځايـــه د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x)-F(x)= \quad \Rightarrow f(x)=F(x)+$$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x)=F(x)+$$

$$\int_a^x f(t)\;dt-F(x)=$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\;dt-F(a)= \quad , \quad 0-F(a)= \quad \Rightarrow \quad =-F(a)$$

که د قيمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt-F(x)=-F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

چې اخيری رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt=[F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړيکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګـــرال تـــرمنځ اړيکـــه ښـــيي، چـــې د نيوټن''لايبنز'' رابطې په نوم هم ياديږي.

يادونه:

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$$
$$\int \cos x\,dx=\sin x+c$$
$$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$$
$$\int \cos ec^2 x\,dx=-\cot x+c$$

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتيګرال حاصل پيداکړئ.

حل: $$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پيداکړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

2. **که په** $f(t) = t$ **تابع کې** $F(0) = 2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ ټکو کې پيداکړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پيداکړئ.

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

فعالیت

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3 - 5x \quad , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5\cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5\cdot 2 = 3 - 10 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5 \frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{728}{6}\right]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلې قیمت په لومړنې انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- د پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u = 1-4x^2 \ , \ du = -8x\,dx$$

$$xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}) + C$$

$$= -\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}) + C = -\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u = x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4+2 \ , \ du = 4x^3dx \ , \ x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\,dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\,dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\,dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- قسمي انتيګرالونه

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تېره، شګه او نورو کې ووينو که خواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

د میتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د میتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

- د $\int\frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شی چې د** $\int x^2\sin xdx$ انتيګرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعګانې په $[a,b]$ انترول کې تعريف شوي وي، لاندی فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیگرال پیداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

یادونه: $\int e^x\,dx = e^x + c$

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \quad = -e^0$$
$$= -1$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 xe^x\,dx = ?$

د خپرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي او د ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدليدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطيلو نو تقسيموو څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \ \dots \ , x_i = a + i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0,x_1] \ , \ [x_1,x_2] \ , \ [x_2,x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1},x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندينيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انټيګرالونه: که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عدد وي د غيرمعين انټګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x)+C$

د نامعين انټيګرالونو خواص(ځانګړتياوې):

$$\int dx = \int dx = x + C$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدې کېږي، چې د $f(x)$ تابع ټاکلی انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګرتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\ \Rightarrow\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتيګرال او مشتق لومړی اساسي قضيه:

که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

- که چيرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u=g(x)$ متحول سره تعويض شي چې مستقل متحول يې x او متمادي مشتق ولري. د زنځيری قاعدې څخه په کار اخيستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکې وي، او $u=g(x)$ همدارنګه $F'(x)=f(x)$ سره تعويض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې آسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړیکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیگرال نیسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u\cdot v - \int v du$$

چې اخیرۍ اړیکې ته د غیر معین انتیگرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابگانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیگرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کیږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

د څېرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

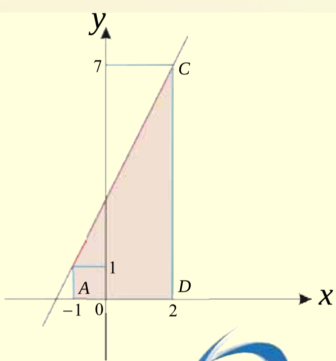
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int (2x^2+3)\,dx$ $)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $l)\ \int (3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور شوي سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



4- لاندې انتیگرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2\,3x^2dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}\,dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 x\,dx$

$)\ \int (4-3x)^7\,dx$

$l)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیگرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\,dx$

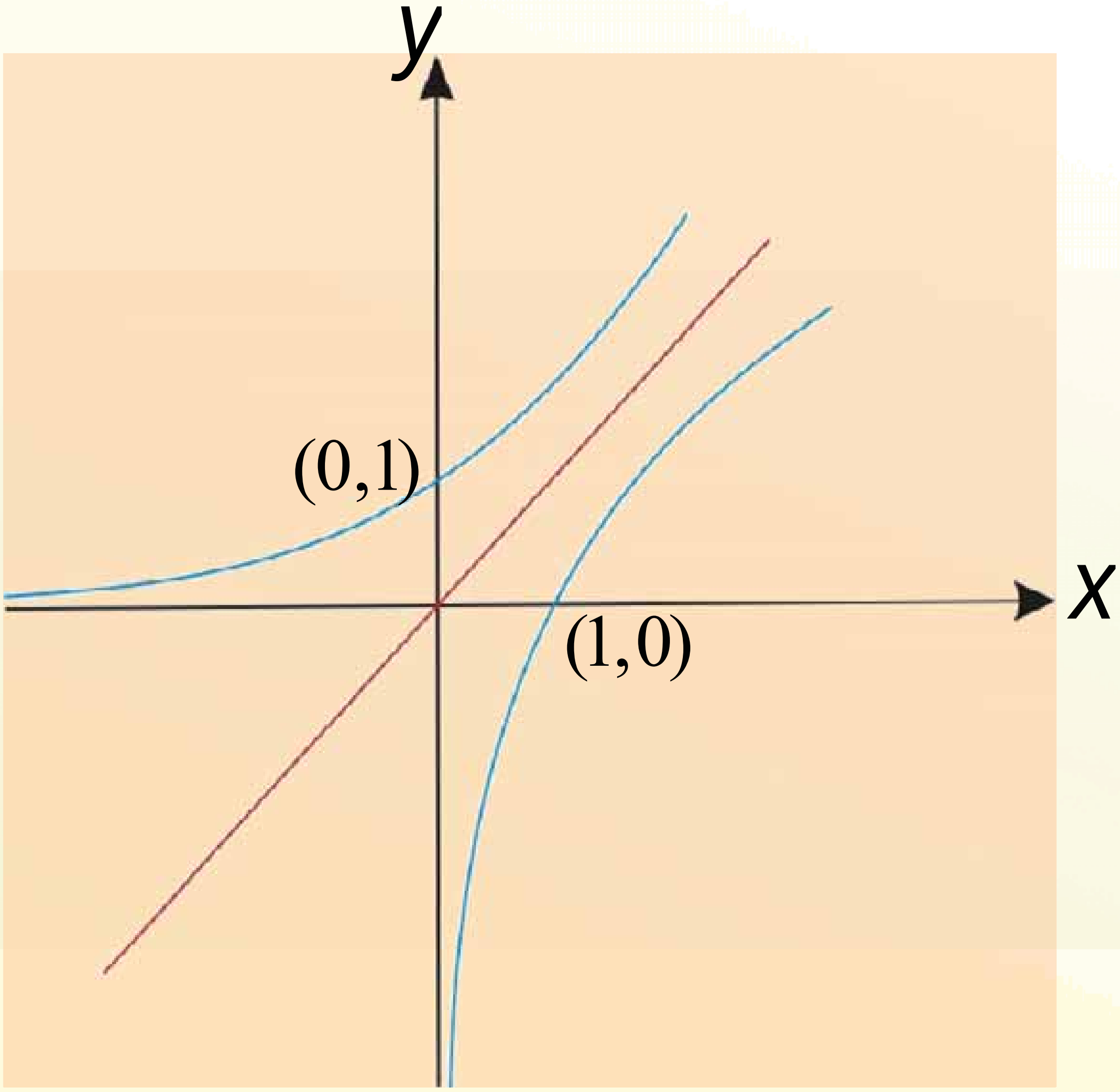
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

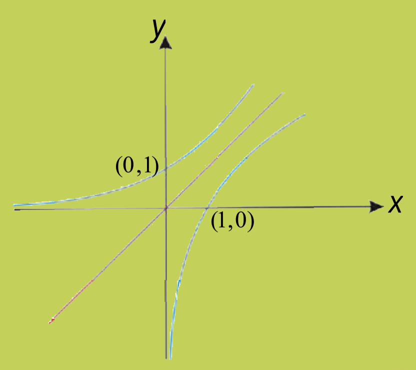
پنځم څپرکی

د لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانو مشتق او انتیگرال


y
x
(0,1)
(1,0)

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښیي، نومونه یې واخلئ.



فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص یې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x}) \quad =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدې کېږي،

لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي؛ نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پايله:

1- د Exponential تابعگانو مشتق د لوگاريتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوگاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوگاريتمي تابعگانو د مشتق پيداکولو لپاره په بيلابيلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه گټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پيداکړئ.

حل: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y = a^u$ وي نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$
$$\ln y = \ln x^{2x}$$
$$\ln y = 2x \ln x$$
$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$
$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$
$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$
$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4+1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y=\log(x^4+1) \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y=\log_3(\log_2 x) \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

3) $y=\log_{x^2-1} x^2+1=\dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \;\Rightarrow\; y=\dfrac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړې:

a) $f(x)=\ln\sin 3x$

b) $f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

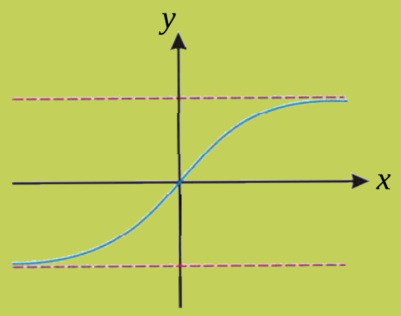
d) $f(x)=\log_{10}3x^2$

e) $f(x)=y=x^x$

f) $y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

د معکوسو تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



که چیرې f او g یوه د بلې دوې معکوسې تابعګانې وي، یعنې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نو:

$\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{dy}{dx}$ یا $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ دی، څکه چې د تابع او ضمني تابعګانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

2) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

4) $(arc\cot x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیداکړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي، چې نومړی کسر له دریو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې A, C, ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{\ }{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\ \ (x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\ \ x^2-3\ \ x-10\ \ +Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\ \ +C)x^2+(A-3\ \ -6C)x+(-2A-10\ \ +5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بایـد صـورتونه هـم سـره برابـر وي، نـو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases}A+\ \ \ +C=4\\ A-3\ \ \ -6C=-1\\ -2A-10\ \ \ +5C=-39\end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2$, $\ \ =3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نومړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\ \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{\ }{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\ \ (x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\ \ )x+(2A-4\ \ )}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix}A+\ \ \ =4\\ 2A-4\ \ \ =-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\quad\ \ =\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{\quad}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{\quad}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+\quad&=3\\-2A-3\quad+C&=-6\\A+2\quad-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+\quad}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درې جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+\quad}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\quad)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\quad+2C)x+(\quad+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+\quad+2C=8\\ \quad+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}A=3\\ \quad=1\\ C=2\end{array}\Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \frac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \frac{x^5}{x^4-1}$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$
$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , \ a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$
$$u = 1 \quad \Rightarrow \ du = 0 \cdot dx$$
$$dv = a^x \quad \Rightarrow \ v = \frac{a^x}{\ln a}$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int \frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x\,dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6}6^x\,dx=\frac{1}{6}\int 6^x\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int \frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int \frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int (1+2^x)dx$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \;,\quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیگرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیگرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دويم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx$ انتيگرال قيمت پيدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\ ,\ u=x^2=1\\ x=2\ ,\ u=x^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln 4-4\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]\approx 2.545$$

پوښتني

لاندي انتيگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int\ln 2x^3dx$ $\qquad b)\ \int\ln\sqrt{x}dx$ $\qquad c)\ \int\log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\qquad e)\ \int_1^2\frac{4}{e^{2x-4}}dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انتیگرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

لومړی مثال: $\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$A+\quad=7$

$-4A-2\quad=-12$

$A=7-\quad$

$-4(7-\quad)-2\quad=-12$

$-28+4\quad-2\quad=-12$

$-28+2\quad=-12$

$2\quad=16\Rightarrow\quad=8$

$A=7-8=-1$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دویم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\quad}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\quad(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\quad x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\quad)x+3A-2}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\quad)x+3A-2\quad=-5x+9$$

$$A+\quad=-5\Rightarrow A=-5-$$

$$3A-2\quad=-5x+9$$

د A او عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\quad)-2\quad=9$$

$$-15-5\quad=9$$

$$-5\quad=24$$

$$=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتني

لاندې انتیګرالونه د قسمي کسرونو په طریقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چيرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولينوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدليدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړي درجه پولينوم مخرج ضربي عوامل چې ځينې يې تکرار راغلی وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم يو ټوټه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشيل تابعګانو انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \ , \ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځينې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، ليکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7 dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

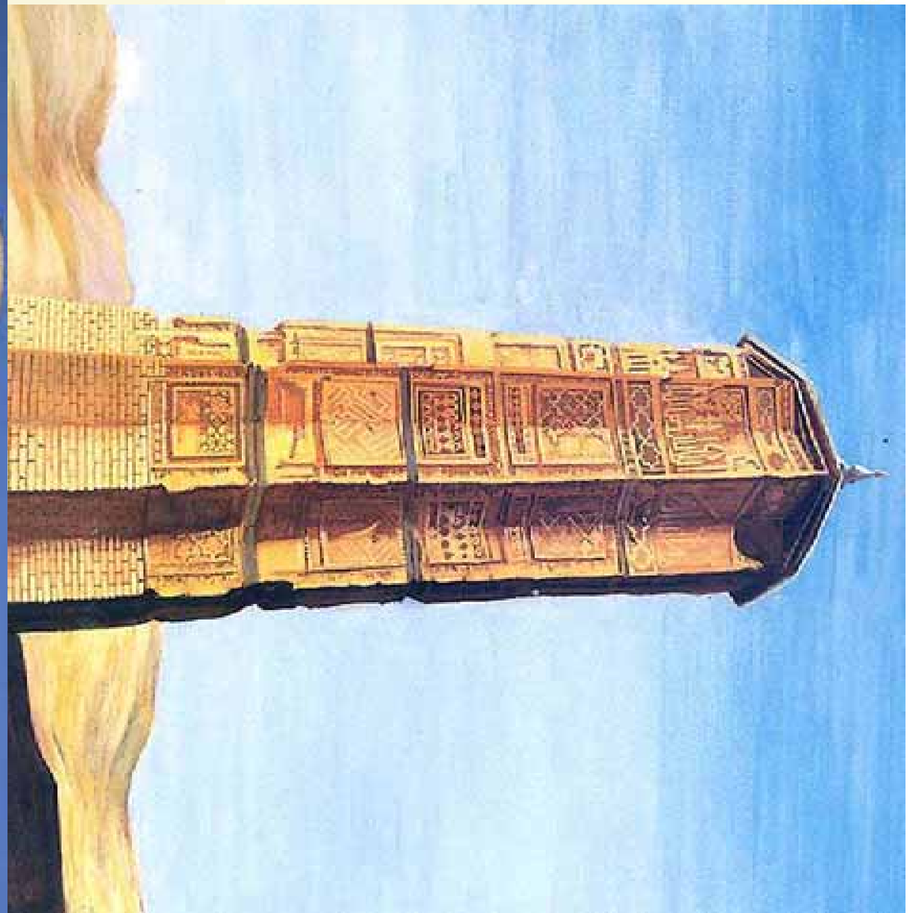
7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$ b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$ d) $y=\sqrt[x]{2}$

شپږم څپرکی

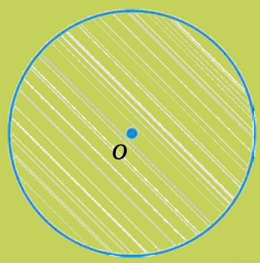
د انتیگرال تطبیقات



د يوې منحني د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه تړل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې ووياست.



فعاليت

د $y = 1 - x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او گراف يې رسم کړئ.
- د $y = 1 - x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيگرال په مرسته پيداکړئ.
- پورتنی فعاليت د $y = -x^2 + 2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$ انتيگرال د يوې سطحې د مساحت قيمت رابښيي چې د $y = f(x)$ منحني او د x محور او د $x = a$, $x = b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع گراف تل د x محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع گراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفی دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیداکوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیداکولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

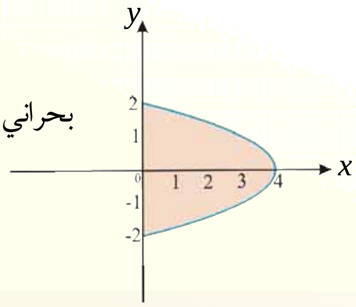
$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$

$x'=0 \;\Rightarrow\; y=0$

$y=0\,,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \;\Rightarrow\; (4,0)$ بحراني ټکی

$x=0\,,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$

$y=\pm 2 \;\Rightarrow\; (0,2)\,,\quad (0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



څرنګه چې د $x=4-y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y=1-\frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحی مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y=1-\frac{1}{2}x^2\,,\; y'=-x$

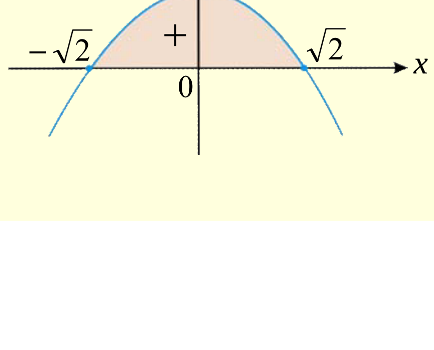
$y'=0 \;\Rightarrow\; x=0$

$x=0,\; y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \;\Rightarrow\; y=1-\frac{1}{2}0^2 \;\Rightarrow\; y=1 \;\Rightarrow\; (0,1)$ بحراني ټکی

$y=0, 1-\frac{1}{2}x^2=0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}x^2=-1 \;\Rightarrow\; x^2=2,\; x=\pm\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{2}\quad,\quad x_2=-\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\,,\;(-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

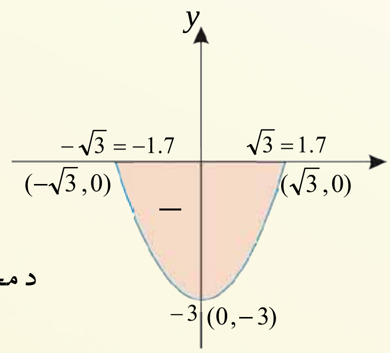
$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د x له محور سره يوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پيدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:



$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\,,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکی

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قيمتونه لري نو ګراف يې د x محور څخه لاندې دی او انټيګرال يې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټيګرال د سرحدونو نيمايي مساحت پيداکوو او په 2 کې يې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پیدا کوو:

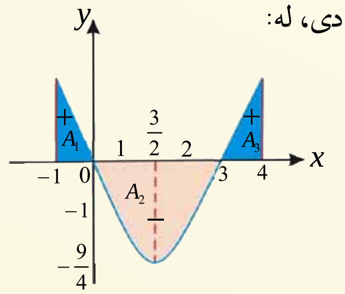
$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \ , \ \ y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \ , \ \ (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي یې د x له محور سره عبارت دي، له:



$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

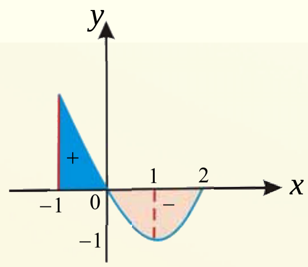
پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني د x محور او $x = 2$ ، $x = -1$ کرښو تر منځ مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \;,\; y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = 2$$



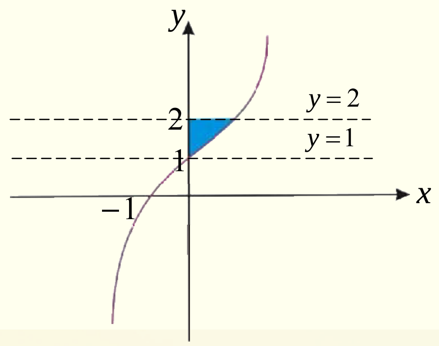
څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصله کې د x محور ښکته خواته پرته ده انتیګرال یې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتنې

1- د $f(x) = \sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y = x^3 + 1$ تابع منحني او $y = 1$ ، $y = 2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

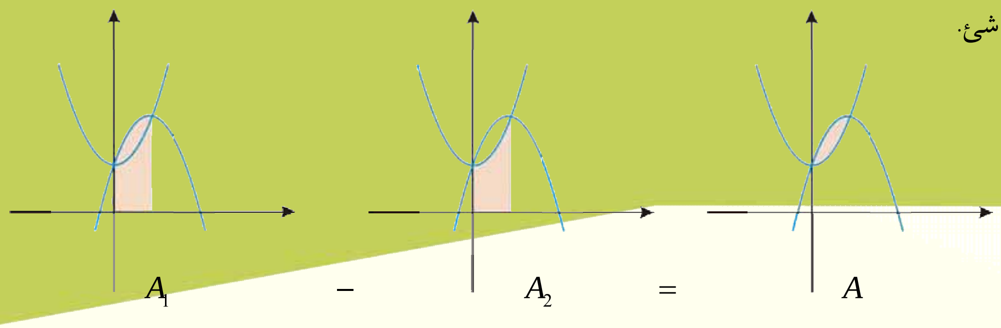


3- د $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x = 0$ او $x = 1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه څه و یلای شئ.



فعالیت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انتیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

ـ که چیرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنيګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحنيګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندیني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع دګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنې ګانو دګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیداکوو:

$f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^2$

$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$

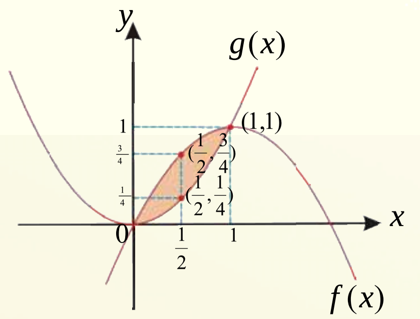
$2x-x^2-x^2=0$

$2x-2x^2=0$

$2x(1-x)=0$

$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$

$1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$



لیدل کیږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیداکوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې دګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

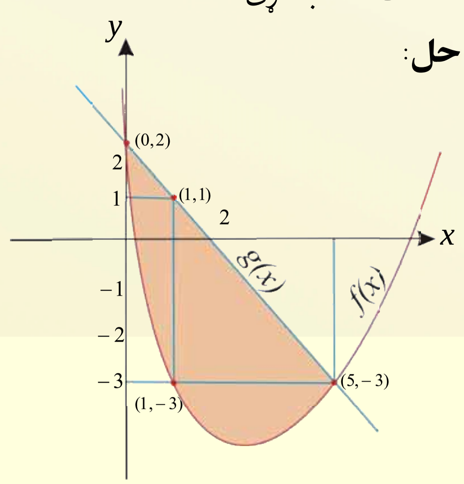
$$\left.\begin{aligned}f(x)&=x^2-6x+2\\ g(x)&=2-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$

$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$

$x_1=0 \quad , \quad x_2=5$

$\Rightarrow (0,2) \;,\; (5,-3)$ دکرښې او منحني د تقاطع ټکي

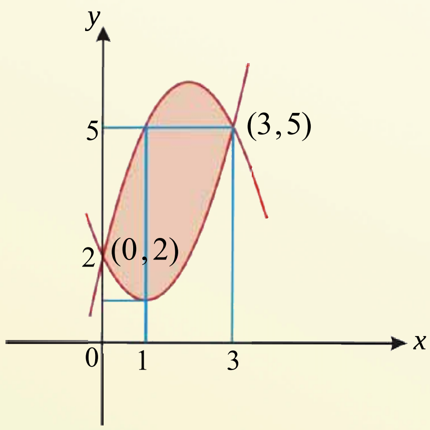


له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنی چې $g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{aligned} f(x)&=-x^2+4x+2\\ g(x)&=x^2-2x+2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0\ ,\ -2x=-6\Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت له $(3،5)$، $(0،2)$ دي اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $g(x)$ ګراف د $f(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$

$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$

$$=-9+18-9+9$$

$$=9$$

پوښتنې

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

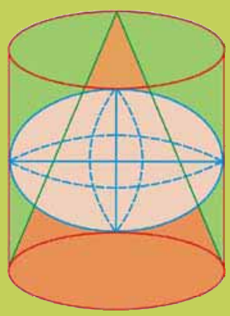
2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.

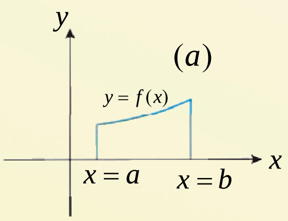


په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

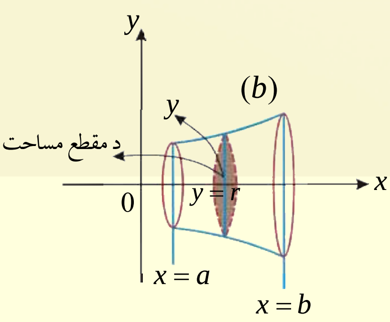
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل

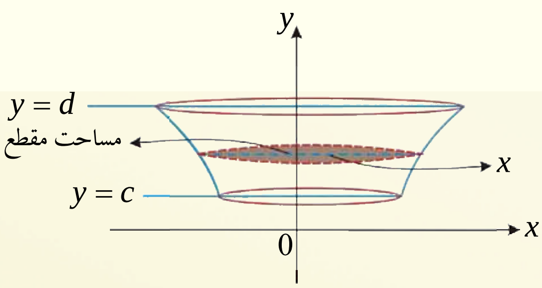


د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استواني سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر ریمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استواني د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع یې $\Delta y = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

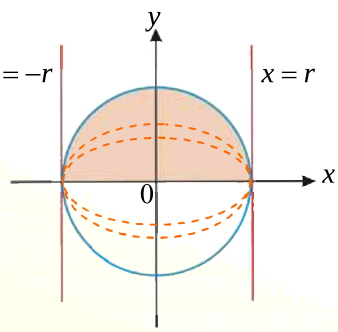
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتیګرال په مرسته په لاس راځي لکه:

1- د انتیګرال په مرسته د کرې حجم پیدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چیرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دایرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نیمې دایرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دایرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

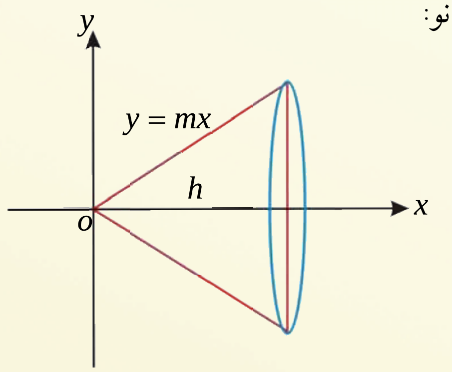
$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

V (د کرې حجم) $= \frac{4}{3} \pi r^3$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V = \int_{0}^{h} \pi y^2 dx$$

$$= \int_{0}^{h} \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_{0}^{h} x^2 dx$$

$$= \pi m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري او شعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

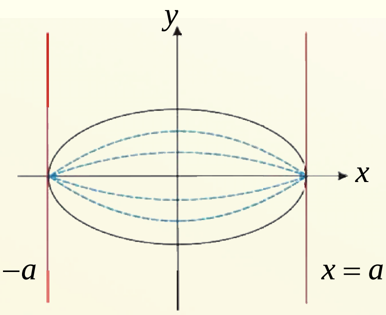
څرنګه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ د منحني او x محور په چاپېر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نیمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi [b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$

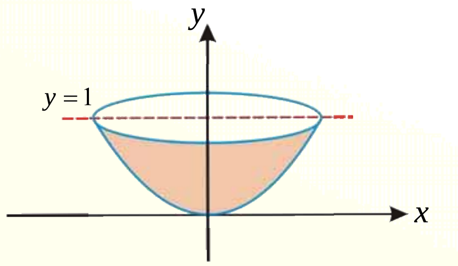
$$V = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

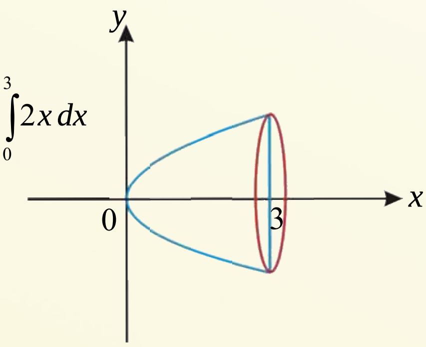


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

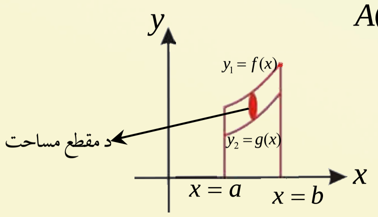
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحنی‌ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړیږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استواني ارتفاع

$A(x) =$ (د استواني د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



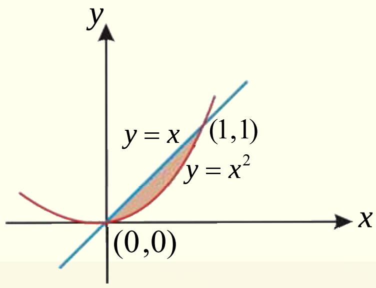
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

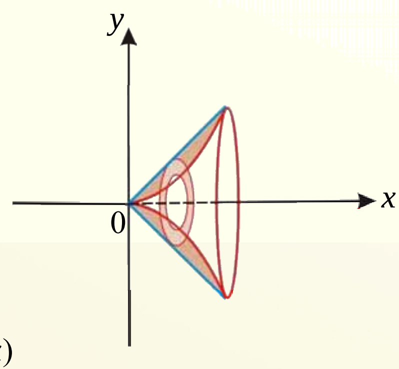
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^2 = f(x) \\ y_2 &= x = g(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

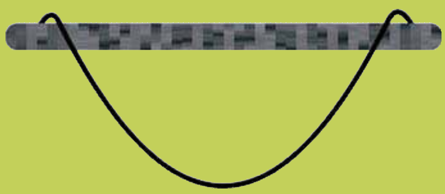
پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوې مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوې مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟

د قوس د اوږدوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

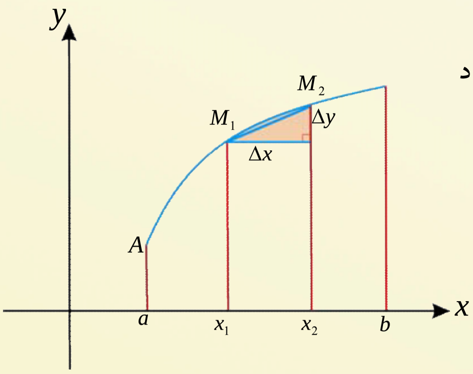
ځرنگه کولای شو چی د مخامخ پري اوږدوالی پیدا کړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دريو مساوي برخو ويشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښئیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـمو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د $M_1 \quad M_2$ د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د $M_1 \quad M_2$ مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.



ثبوت:

له قایم‌الزاویه $M_1 \quad M_2$ مثلث څخه په گټې اخيستني سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

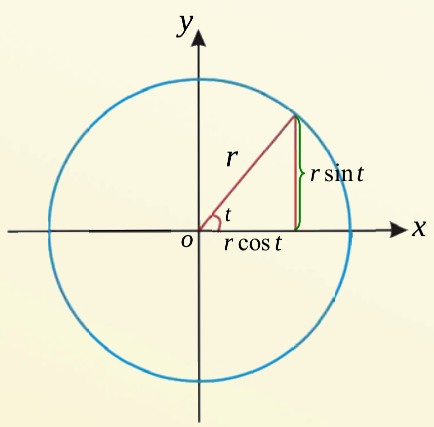
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi\,r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi\,r$

یادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو:

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\; dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4}dx$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1 + \frac{9}{4} \cdot 4)^3} - 1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} - 1)$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې:

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1}\;\; dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتني

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيگانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيداکړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0\le x\le 1$ د فاصلې تر منځ پيداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحنی او د x د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنیګانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع دګراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنۍ برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحني د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهیږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

(1 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

(2 $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$

د شپږم څپرکي پوښتنې

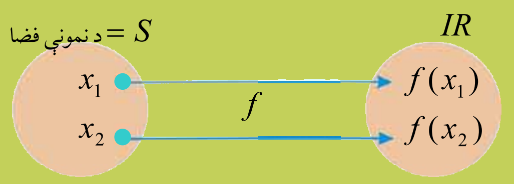
1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحني او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحني او د $x^2 + y^2 = 2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

اووم څپرکی
احصائیه

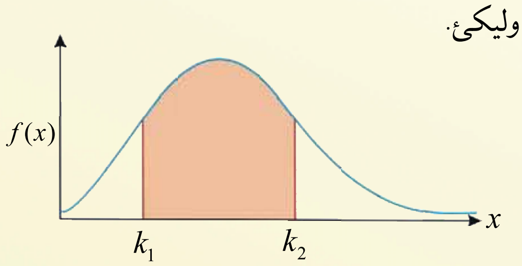
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمايښت، نمونه‌يي فضا او ناڅاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې تر ېگټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپير لري؟
- که $x_1, x_2 \dots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او $f(x)$ د منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښيئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$, $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چیرې x ناځاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots\dots\dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

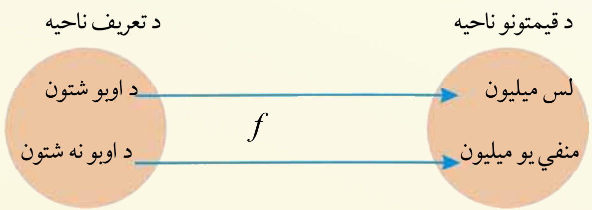
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې بـه د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*) ، وریانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه مجزا توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعاليت

د لاندې آزمويښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- د يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m برياليتوب د n آزمايښت څخه($m<n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د برياليتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمايښت څخه په q وښودل شي نو د m کاميابي احتمال د آزمايښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو ځلور ځوابه آزمويني د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) برياليتوب په T او (ناسم ځواب) نه برياليتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه خرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو برياليتوب او نابرياليتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د بريالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابريالیتوب احتمال دی.

که چيرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د بريالیتوب احتمال P او نابريالیتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې بريالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$

$$P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو،

د پورتنی فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جملهيي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکري له ناروغی څخه 0.4 دی، که چيرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښۀ شي او همدا شان پيدا کړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنگه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$
$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176 0=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$
$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$
$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$
$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$
$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$
$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$
$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتني

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسيږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوښې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

که چیرې د برنولي دوه جملهيي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ویلای شئ که چیرې د برنولي په دوه جملهيي توزیع کې د P قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جملهيي توزیع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

فعالیت

که $n=5$, $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قیمتونه په داسې حال کې چې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنیو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ، ویلای شي چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دي؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو د کامیابي احتمال د n آزمایښتونو څخه کله چې n لوی او د کامیابي احتمال P کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره وکارول کیږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخيستلي دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنگه ليدل کيږي چې $n = 200$ ډير لوی او $P = 0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad\qquad \lambda = n\,p = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533\cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چيرې دا احتمال د دو جملهيي په فورمول محاسبه کړو، لرو چې:

$$P(X=m) = \binom{n}{m} P^m\; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= 200 \\ p &= 0.01 \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X=3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^3(0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنگه چې ليدل کيږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

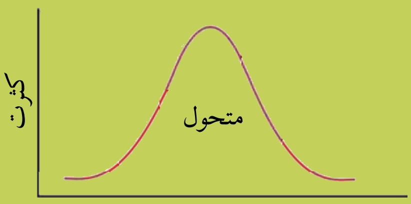
ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

د نورمال توزیع

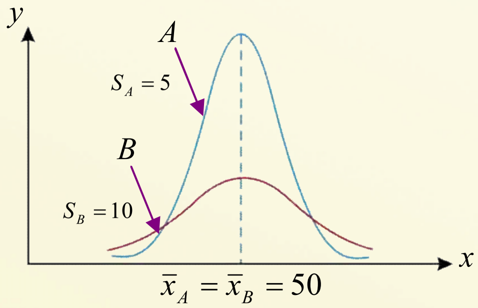
پوهېږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر لـه زانګولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



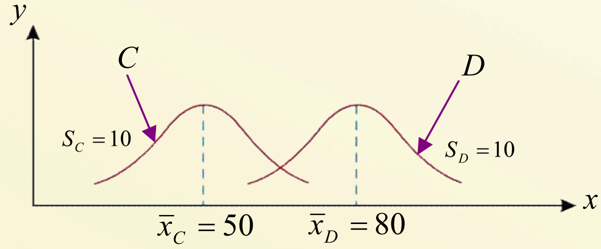
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

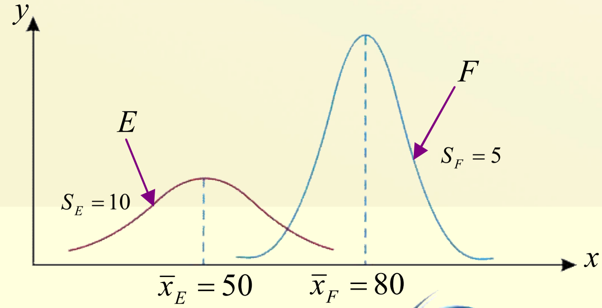
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

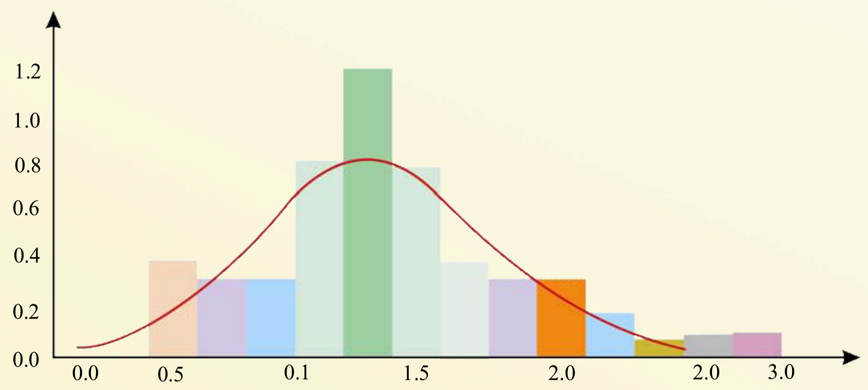
$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

په داسې حال کې چې $e = 2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف ، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

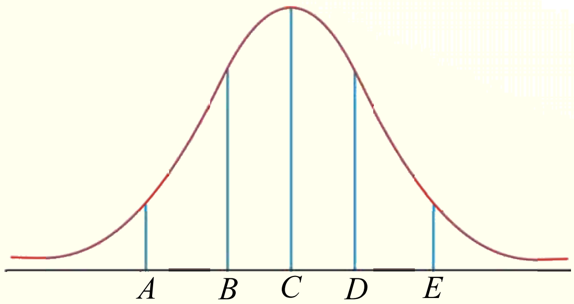
مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګی مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، چې د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو. یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړي کس له خوا تر څېړنې $(\frac{gr}{mil})$ د لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



پوښتنه

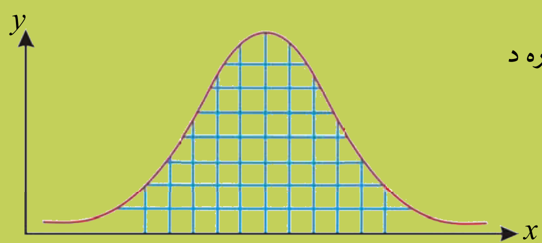
لاندیني شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

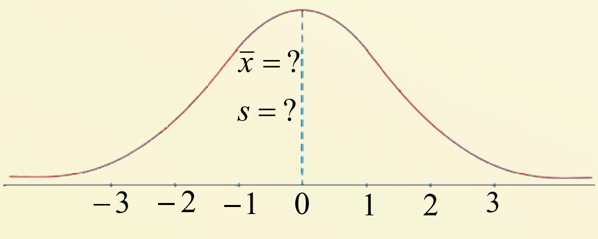
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

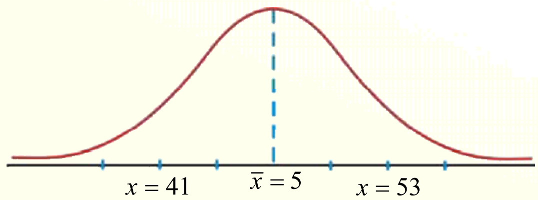


فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



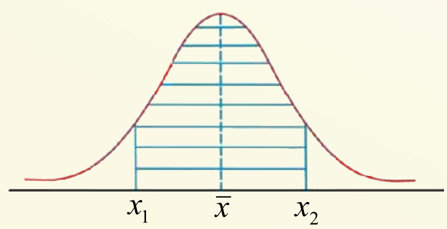
- کـه پـه لانـدې شـکل کې چې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسـط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوي دي نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتگرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیعګانو د منحنی لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

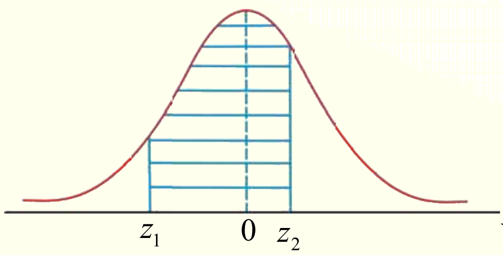
په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنی ته د سټنډرډ نورمال منحنی په نامه یا د نورمال احتمال منحنی نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحنی او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

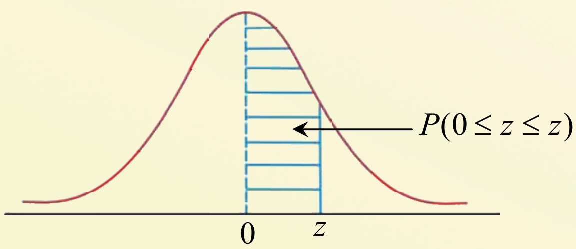
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$

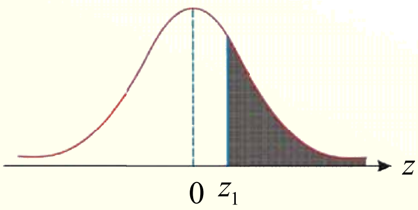


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

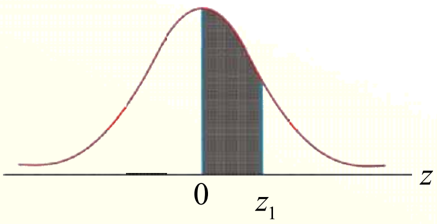
د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوي دي، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوي دي چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر z پورې راښیي.



جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول(2)

z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱٦۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹٦	۰/۰٦۳٦	۰/۰٦۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲٦	۰/۱۰٦۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳٦۸	۰/۱۴۰٦	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱٦۲۸	۰/۱٦٦۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳٦	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/٦	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸٦	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲٦۱۲	۰/۲٦۴۲	۰/۲٦۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷٦۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹٦۷	۰/۲۹۹٦	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰٦	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸٦	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲٦۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳٦۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴٦۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳٦۲۱
۱/۱	۰/۳٦۴۳	۰/۳٦٦۵	۰/۳٦۸٦	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸٦۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹٦۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰٦٦	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱٦۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳٦	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲٦۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰٦	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰٦	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/٦	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴٦۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵٦۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴٦۰۸	۰/۴٦۱٦	۰/۴٦۲۵	۰/۴٦۳۳
۱/۸	۰/۴٦۴۱	۰/۴٦۴۹	۰/۴٦۵٦	۰/۴٦٦۴	۰/۴٦۷۱	۰/۴٦۷۸	۰/۴٦۸٦	۰/۴٦۹۳	۰/۴٦۹۹	۰/۴۷۰٦
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲٦	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵٦	۰/۴۷٦۱	۰/۴۷٦۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲٦	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴٦	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸٦۱	۰/۴۸٦۴	۰/۴۸٦۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹٦	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰٦	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱٦
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳٦
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴٦	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/٦	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵٦	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹٦۰	۰/۴۹٦۱	۰/۴۹٦۲	۰/۴۹٦۳	۰/۴۹٦۴
۲/۷	۰/۴۹٦۵	۰/۴۹٦٦	۰/۴۹٦۷	۰/۴۹٦۸	۰/۴۹٦۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷٦	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸٦	۰/۴۹۸٦
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹٦	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/٦	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

د مثال په ډول که چیري $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسیږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کیږو چې د منحنې د لاندې اړونده سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

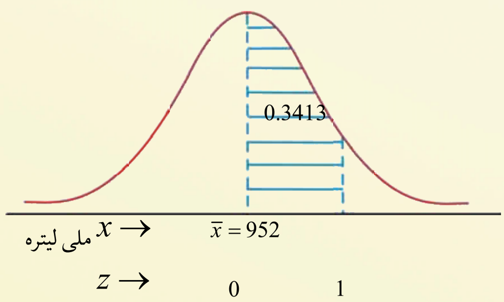
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلیږي. د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$P(0 \le z \le 1) = P(z_2) - P(z_1)$$
$$= P(1) - P(0)$$
$$= 0.3413 - 0$$
$$= 0.3413$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

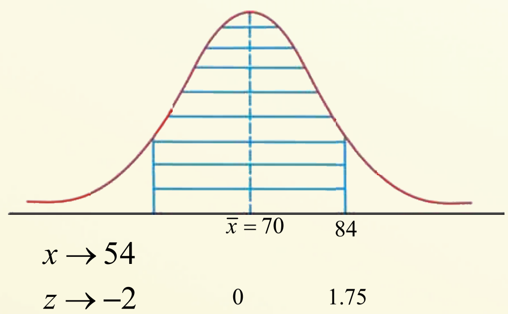
څرنگه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$

$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$

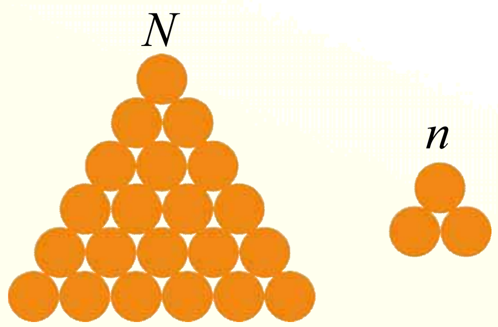


پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټره پورې نوشابه لري.

نمونه اخیستل

په دې متل کې((موټې د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.



$N =$ **جامعه** $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چیرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته ایا کولای شې یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شې چې د اوسط او معیار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخیستل کېږي، یو شان وي.
- ایا د نمونه‌ګیرۍ او لیدل شویو ناخاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخیستنې بیلې بیلې لارې شته دی.

ـ ناخاپه نمونه اخیستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماټیک نمونه اخیستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخیستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخیستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرۍ ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناخاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1 , x_2 \ldots x_n$ ناخاپه متحولونو یوه ناخاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1, x_2)..., x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)...f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناخاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپینه ګلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخیستنه ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 و x_3 ناخاپه متحولین یو له بل څخه بېل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې د یوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانیولې ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

د نمونې د اوسط توزيع

دولت غواړي وپوهېږي چې د يوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس بايد ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کميت تخمين کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعاليت

- د لاندې data د دريو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پايله راښيي:

نوم	داود	سليمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزيع يې وليکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معيار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نيولو) ارايه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښيئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزيع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زيع جدول) وليکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزيع جدول مستطيلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n^{\ 2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړې.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

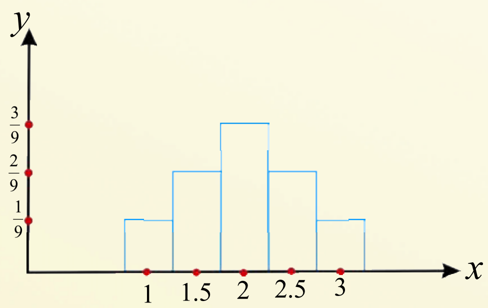
ج: لاندي جدول ټولې دوه‌ګوني ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندي ډول ښودل کیږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندي ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو ليدل كېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\,2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض كوو چې يوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت كې توزيع، اوسط او وريانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګونې ناځاپه نمونه د ځاى په نيولو سره وټاكئ او د نمونې توزيع اوسط يعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د كثرت څو ضلعي ګراف يې رسم كړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وريانس حساب كړي.

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت تـه د ټولنې پـارامتر او د نمـونې کمیت ته نمونه یـي اوسـط ویـل کېـږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونـو احصائیه دکوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ پـه اختیـار کـې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=?$$

- که د لویې ټولنې حجم پـه $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، دکـوچنی ټـولنې حجـم پـه $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) چې N د ټـولنې عناصـر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیار انحراف دی) وښیو څه وخـت کېـدای شـي چـې د لـویې ټـولنې حجم له کوچنی ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, ..., x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, ..., x_n$ ناځاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شـوی وي او د μ اوسـط لرونکـی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چیرې N د یوې لویې ټولنې د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناځاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط او $\delta_{\bar{x}}^{2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x}-M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناځاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضـریب د N د لویـو قیمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n\to\infty$ وکړي، برابر لـه (1) سـره دی.

مثال: د یوه لوی ټولګی څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چیرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}} = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z) \le 3 = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

همدارنګه د $n = 1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x} > 80) = P(z = \frac{\bar{x}-\mu}{\delta} > \frac{80-71}{9} = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z) \le 1 = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښارکې n کسان غواړي د B يوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که داکسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعاليت

- که چيرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^x(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چيرې $x=n\hat{P} \Rightarrow \hat{P}=\dfrac{x}{n}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P}=\dfrac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناځاپه متحولينو د $x_1, x_2, ..., x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چيرې x ناځاپه متحول، n د برنولي د آزماينښتونو مجموعه، P د هر آزماينښت برياليتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناځاپه متحول وريانس وي.

د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناځاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{pq}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P = 0.3$ دی، یوه ساده ناخاپه نمونه $n = 6$ ګونه ټاکو که چیرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناخاپه متحول د دوه جمله‌يي توزیع د $P = 0.3$ او $n = 6$ پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \qquad x = 0, 1, \ldots, 6$$

د دوه جمله‌يي توزیع جدول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناخاپه متحول د $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P} \le 0.6) = P(x \le 3.6) = P(x \le 3) = \sum_{x=0}^{3} B(x, 6, 0, 3) = 0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P} \le 0.27) = P(x \le 1.62) = P(x \le 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیك فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ(تېروتنې) څخه ډک کړي $P = 0.7$ وي، یوه نمونه د $n = 200$ ګونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې نه ګټه اخېستل کېږي.
- د يوه مجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحيه سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x مجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يو مجزا احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n خليې(تايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^{2}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^2}$$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چیرې x د دوه جملهیي توزیع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، P د کامیابی احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیه د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = np$ او $V(x) = npq$

همدارنګه د دوه جملهیي توزیع، اوسط، وریانس او د سټنډرډ توزیع او $\hat{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه یې د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیرۍ طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونهګیري، منظمه نمونهګیري، ګروپي نمونهګیري، خوشهیي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چیرې x د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناځاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}-2s$, $\bar{x}+2s$ د پاسه دوه ټکې د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, \dots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونـو اوږدوالـی یـې د ساعتونو پـه حساب سـره عبـارت لـه 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د x د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانۍ اوسط او د 25 افغانۍ معیار انحـراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعـه لـه 2100 افغانیو څخه زیاتـه وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یـوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. پـه 12 مثـال کـې کـه چیـرې $P = 0.4$ وي، یعنـې ددې احتمـال چـې یـو وګـړی د A کاندیـد طرفـدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګـړي د A کاندیـد طرفدار وي.

اتم څپرکی

احتمالات

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويم نـل څخه پـه وار سره اوبه په څمکه تويېږي ويـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د توييدو توپير په څه کې دی؟

فعاليت

- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آيا د ونې څخه د يو پې پخې منې د لويدلو وخت وړاندوينه کولای شئ چې وروسته له څو ثـانيو، دقيقـو او يـا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لويدلو نمونه يي فضا وليکې.
- د رمل داني د اچولو تجربې نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتلـه کولای شي.

د پورتنی فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناخاپه تجربې نمونه يي فضا عبارت له هغه ټاکلي او يا نـا ټـاکلي سـټ يـا مجموعې څخـه ده، چې د ځينـې عناصرو يې د شمېر وړ، او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د پرېکړې يـا ګسـسته(شـليدلې) نمونه يي فضا يا متصل په نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(پيوسته) يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(پيوسته) او کومه يوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوې، نو پرېکړې يا ګسسته فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکيل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نبنتي يا پيوسته فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستي دي.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-يي فضا چې کيدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمت شي، په دې ډول د داسې ناځاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقيقي عدد کيداې شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمادی، نبنتي يا پيوسته نمونه يې فضا ده؛ يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنی نمونه يې فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

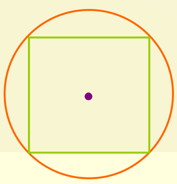
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر يې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخيستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصل يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې ورانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياست چې دا څنګه يوه نمونه يې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناځاپي يا تصادفي ډول د دايرې په دننه کې يو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.



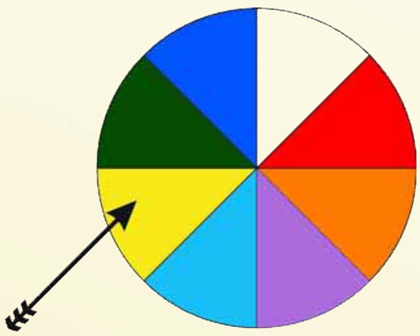
3- يو طبيعي دوه رقمي عدد و ټاکئ، هغه احتمال پيدا کړې چې عدد د 4 مضرب وي.

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچه په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شي؟
- د غشي د لګېدو د چانس کچې په تور رنګ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا يې وليکئ.
- لومړني ناځاپه پېښې لست کړي او د هر يو احتمال پيدا کړي دي؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شي؟

د پورتنی فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S=\{e_1, e_2, ...e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناځاپه لومړني پېښه ده که $0 \le P(\{e_i\}) \le 1$, $i=1, 2, ...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

مثال: خلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

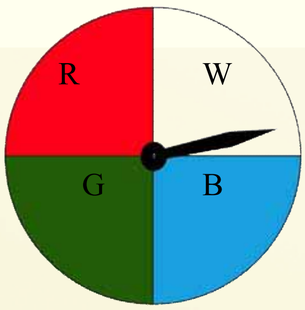
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې:
$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د دربېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د دربېدلو احتمال به څومره وي؟



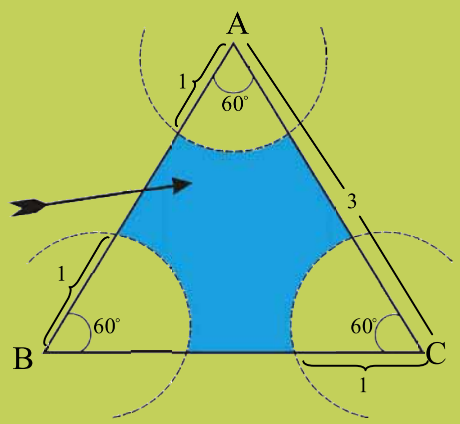
2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیداکړی، چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې وکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو څوک په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړي.

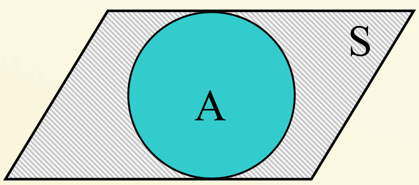
د نښتي يا پيوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



فعاليت

- آيا ويلای شي چې د يوې ټوټه کرښې، د يوې مستوي د يوې برخې او يا د فضا د حجم څو ټکي يو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لويې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د A او د S ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړيکه لري؟



- آيا کولای شئ دا مسئله په فضا د يوه جسم حجم د يوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عموميت ورکړئ؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله لاسته راځي.

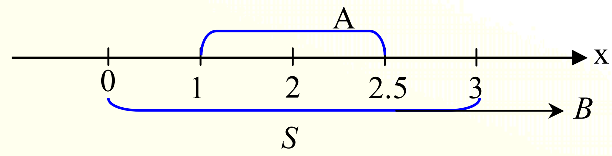
پيوسته(متمادي) نمونيي فضا د نامعينو ټکو مجموعه ده، چې شکل يې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او يا په فضاکې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پيدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او يا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخيستنې سره د x يو متحول، د يوه مساحت د يوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتيب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو لکه x, y او z څخه ګټه اخلو.

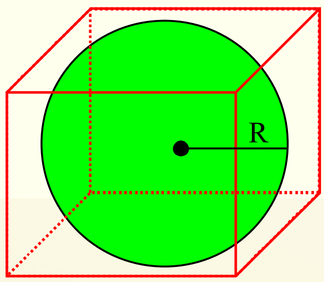
لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x يو ټکي په ناڅاپي يا اتفاقي ډول ټاکو پيدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

حل: د حقیقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالی}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالی}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطې کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

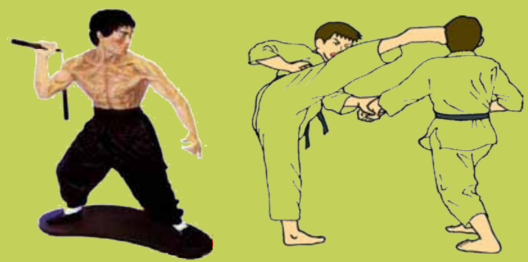
پوښتنې

1- د حقیقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ، چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.

مشروط احتمال

له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بازان وی. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارته بازه نجلي وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده‌کوونکو څخه یې 70% نارینه زده‌کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده‌کوونکو لپاره احتمال یو شان وی، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کوونکي ټاکل د ښوونځی له زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکی د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

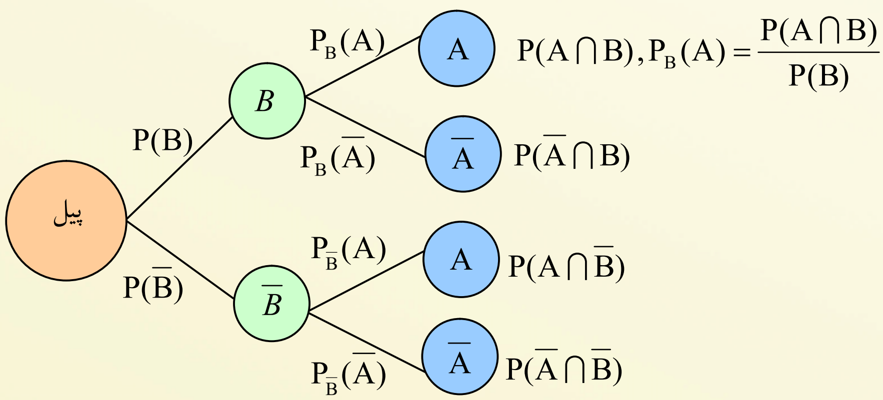
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌یي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونه‌یي فضا دوې ناڅاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅاپي پیښې احتمال نظر د B ناڅاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



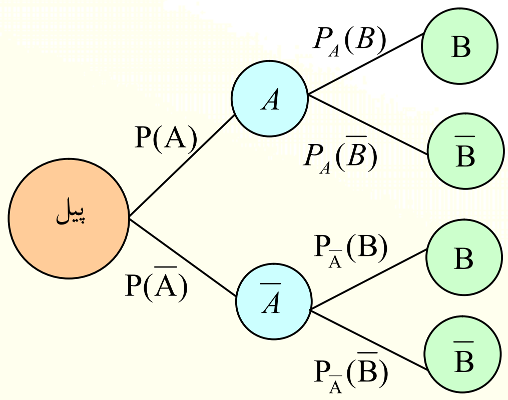
د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر د لومړی قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap \bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

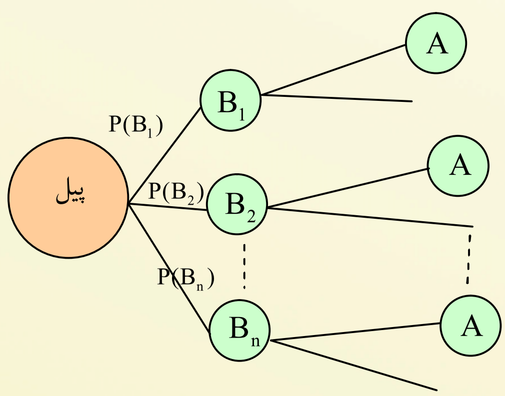
2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناخاپي پیښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري ویش لپاره عمومیت ورکړو د ونې په ډول د دیاګرام د په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګاډي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسیږي. په منځني ډول نوموړی 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چیرې پیښې:

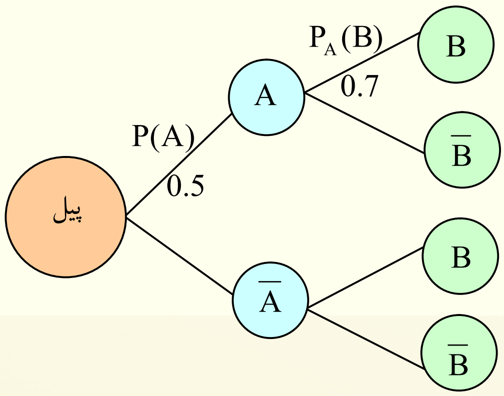
A: دګاډي په واسطه راتلل　　　　B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

حل: د نوموړي احتمال د پیداکولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

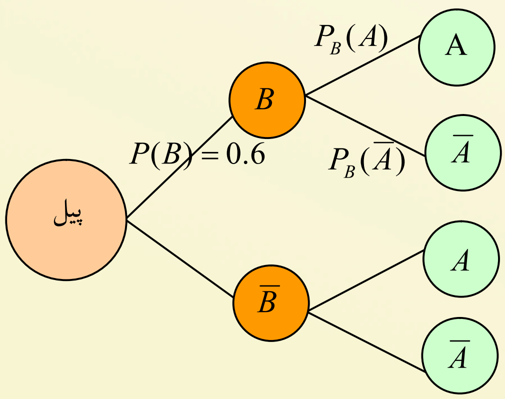
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

نو په دې اساس د ګاډي په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



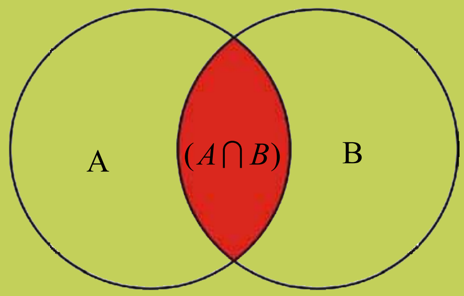
پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل شوونځي ته په دې شرط چې د ګاډي په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پېښې احتمال شوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د ګاډي په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دی.



د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پېښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پېښې احتمال يو له بل سره څه اړيکه لري؟



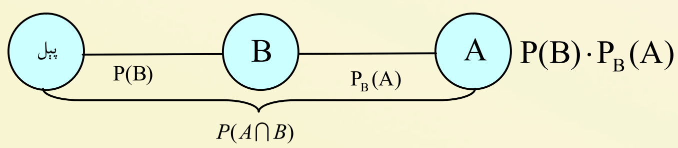
فعاليت

- که چېرې A او B دوې ناخاپه پېښې د S په نمونه يي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پېښې مشروط احتمال B ته وليکئ.
- د ونېيز دياګرام څخه په ګټه اخيستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قيمت په لاس راوړئ.
- د $(A\bigcap B)$ ناخاپه پېښو احتمال د A او B ناخاپه پېښو څخه او يا د A مشروط له B څخه په ګټه اخيستنې سره وليکئ.
- د فعاليت د دوو پورتنيو بندونو د محاسبې پايلې يو له بل سره پرتله کړې.
- آيا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پېښو لپاره عموميت ورکړو.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

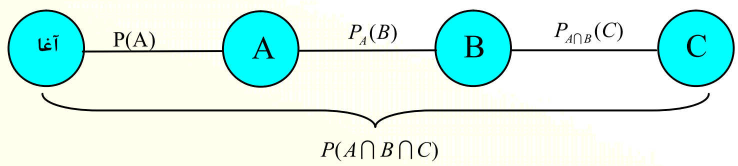
د S په يوه نمونه يي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف په پام کې نيولو سره لرو: $P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونېيز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دریو A، B او C پیښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناځاپي پیښو لپاره هم په لاس راوړو.

مثال: د B_1 , B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو دګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

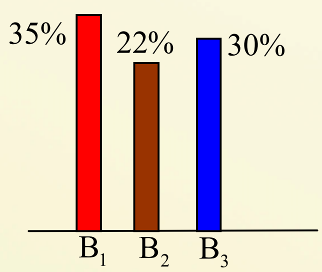
په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناځاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند یې ټاکلی دی.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

ولایت	راي ورکوونکي فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30



د B_i $(i=1,2,3)$ ناځاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یي فضا یو ویش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $\bigcup_{i=1}^{3}B_i = S=B_1\cup B_2\cup B_3$ دی، نو $B_i\cap V$ $(i=1,2,3)$ پیښې یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چیرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنگه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پیښنو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پیښنه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپه پیښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادیږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه یي فضا یو پیښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پیښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayex)فورمول:

$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه یي فضا پیښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

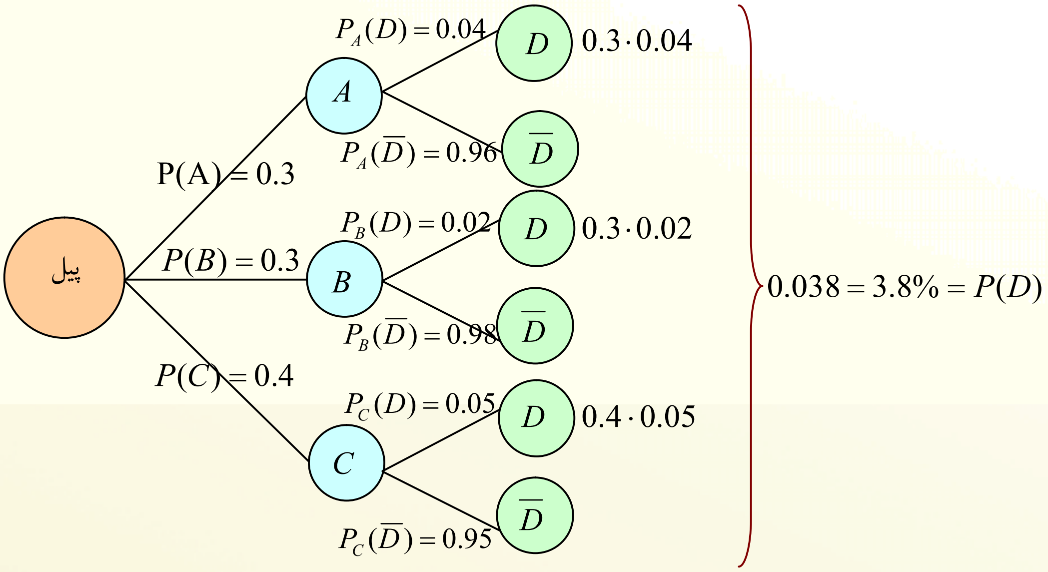
پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C دري ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق گروپونه تولیدوي. که چیرې په ماشینونو کې د گروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوي گروپ وران یا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمیره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمیرې وهل شوې وي؟

د ناڅاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناڅاپو پېښو یا حادثو د B د پیښې پیښېدل د A په پیښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پیښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پیښې پېښدل پر B ناڅاپه پیښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پیښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناڅاپه پیښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلو پیښو په نامه یادیږي.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پیښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پیښې وي د P(A) او $P_B(A)$ احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A \cap B)$ ناڅاپه پیښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ د پیښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پیښې مستقلې بلل کېږي که چیرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چیرې A او B پیښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترګې ولري.

پیدا کړئ هغه احتمال چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توګه هوښیار ذکي او تورې سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $\overline{A}\cap B$ ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

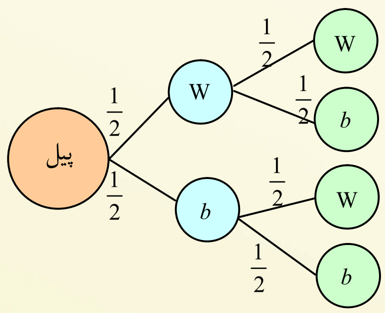
د A پیښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) څرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

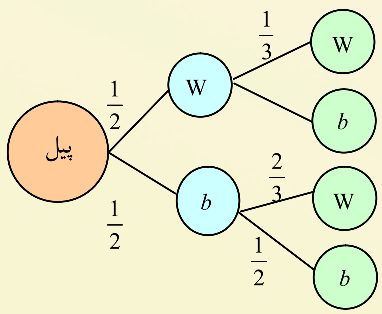
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.



b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلې یا وابسته دي.



دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي ډک یې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلیږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوي او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د **پرېکړې يا** گسسته نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سکې اچولو تجربي نمونه‌يي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پیوسته يا متمادی نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضا کې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پيښې چې د هغوي پېښې د تجربي په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نښتی(پیوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپې پيښې لپاره په يوه تجربي نمونه‌يي فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

که چيرې A او B د S، د نمونه‌يي فضا دوې ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دې حالت کې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پيښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي په دې شرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

يوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چيرې:

(د ضرب د حاصل اصل) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتې يا پيوسته او کومه يوه پرېکړې يا ګسسته دي؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالي يې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددې شته دي چې د کېڼ اړخ اره شوي برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنې وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاي کې چې د مامورينو په ګاډې کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاي ته رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پيدا کړې ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنې او د 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې ورانګې يا شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پيدا کړې ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ،شميره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنی دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کليګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړونـد کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.